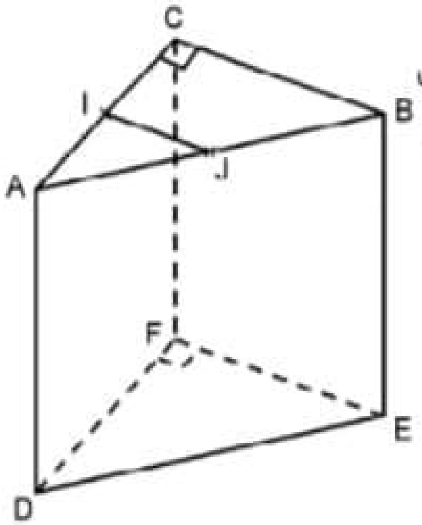
## التّمرين الأوّل:




في الموشور القائم ABCDEF الممثّل بالرّسم المقابل، DEF و ABC مثلّثان قائما الزّاوية على التّوالي في F و C، I منتصف [AC] و J منتصف [AB].

1) بيّن أنّ (BC) و (IJ) متوازيان.

2) استنتج أنّ (BCD) و (IJ) متوازيان.

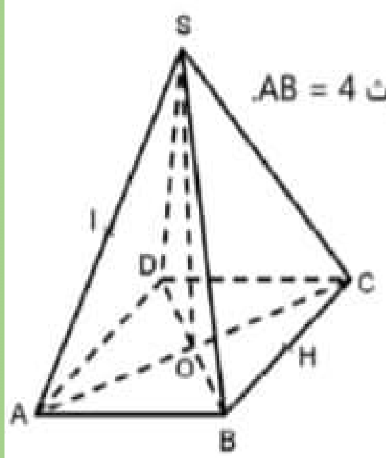
3) أ) بيّن أنّ (BC) عمودي على (ADC).

ب) بيّن أنّ (IJ) عمودي على (ADC).

ج) استنتج طبيعة المثلّث IFJ.

4) إذا علمت أنّ DA = EF = 4 و DF = 3 أحسب JF.

## التّمرين الثّاني:



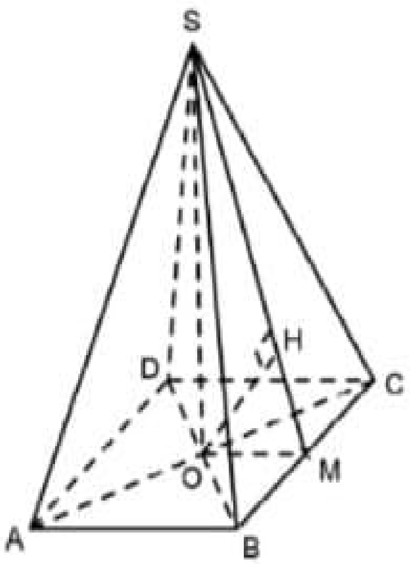

SABCD هرم منتظم ارتفاعه SO = 6 و قاعدته مربّع ABCD مركزه O بحيث AB = 4.

1) أحسب OA و SA.

2) لتكن H منتصف [BC]. احسب SH.

3) لتكن I منتصف [SA]. أحسب OI.

## التّمرين الثّالث:




SABCD هرم منتظم قاعدته مربّع ABCD مركزه O و M منتصف [BC]

بحيث BC = 12 و SM = 8.

1) أحسب قيس مساحة المثلّث SBC واستنتج المساحة الجمليّة للهرم.

2) أحسب SB ثمّ SO واستنتج قيس حجم الهرم.

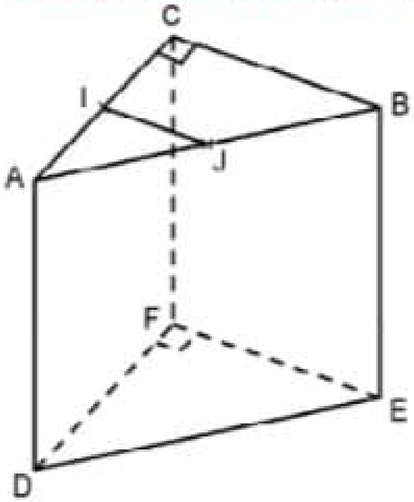
3) لتكن H المسقط العمودي لـ O على (SM). أحسب OH و HM.

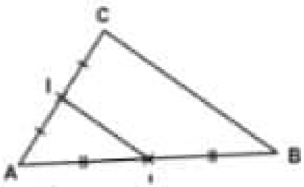
4) أحسب HB واستنتج أنّ المثلّث OBH قائم الزّاوية.

## إصلاح التمرين الأوّل:

في الموشور القائم ABCDEF الممثّل بالرّسم المقابل، DEF و ABC مثلّثان قائما الزّاوية على التوالي في F و C،

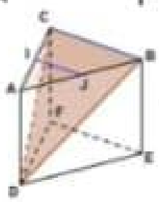
I منتصف [AC] و J منتصف [AB].




1) بيّن أنّ (BC) و (IJ) متوازيان.

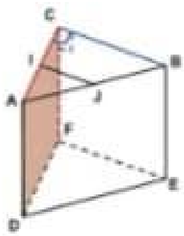
في المثلث ABC لدينا I منتصف [AC] وJ منتصف [AB]إذن(BC)//(IJ).



2) استنتج أنّ(BCD) و (IJ) متوازيان.

لدينا (IJ) يوازي (BC) والمستقيم(BC) مُحتو في المستوي (BCD) إذن (IJ) يوازي (BCD).

3) أ) بيّن أنّ (BC) عمودي على (ADC).

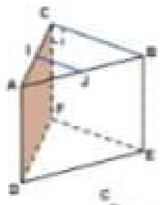


لدينا: *) (BC)⊥(AC)   (معطى)

*) (BC)⊥(CF)   (لأنّ BCFE وجه جانبي للموشور القائم إذن هو مستطيل)

*) (AC) و (CF) مستقيمان من المستوي (ADC) ويتقاطعان في النّقطة C

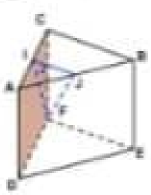
إذن المستقيم (BC)يعامد المستوي (ADC) في C.



ب) بيّن أنّ (IJ) عمودي على (ADC).

لدينا (IJ) يوازي (BC) و (BC)يعامد المستوي (ADC) إذن (IJ)يعامد المستوي (ADC).

ج) استنتج طبيعة المثلّث IFJ.



لدينا المستقيم (IJ)يعامد المستوي (ADC) في I و(IF) مستقيم مُحتو في هذا المستوي

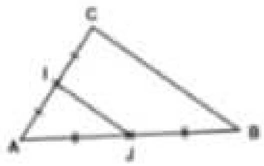
ويمرّ من I إذن (IJ)يعامد(IF) في I وبالتّالي المثلّث IFJ هو مثلّث قائم في I.

4) إذا علمت أنّ DA = EF = 4 و DF = 3 أحسب JF

المثلّث IJF هو مثلّث قائم في I إذن حسب نظريّة بيتاغور $JF^2 = IJ^2 + IF^2$ .

لحساب JF نبحث أوّلا عن $IJ^2$ و عن $IF^2$.

*) $IJ^2 = ?$



في المثلث ABC لدينا I منتصف [AC] ول منتصف [AB] إذن $IJ = \frac{1}{2}BC$.

وبما أنّ $BC = EF = 4$ (لأنّ BCFE مستطيل) فإنّ $IJ = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

وبالتالي $IJ^2 = 2^2 = 4$ .

*) $IF^2 = ?$

لدينا المثلّث ICF هو مثلّث قائم فيC. حسب نظريّة بيتاغور لدينا $IF^2 = CI^2 + CF^2$ .

وبما أنّ $CI = \frac{3}{2}$ ( لأنّ I منتصف [CA] و $CA = DF = 3$ ) و $CF = DA = 4$

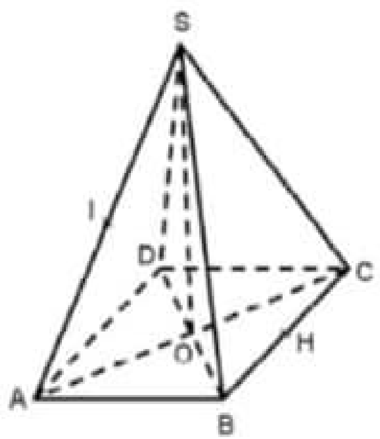
فإنّ $IF^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4^2 = \frac{9}{4} + 16 = \frac{9}{4} + \frac{64}{4} = \frac{73}{4}$.

*) $JF = ?$

$JF^2 = IJ^2 + IF^2 = 4 + \frac{73}{4} = \frac{16}{4} + \frac{73}{4} = \frac{89}{4}$ ومنه $JF = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$.

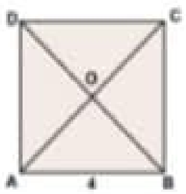
## اصلاح التمرين الثاني:

SABCD هرم منتظم ارتفاعه $SO = 6$ و قاعدته مربّع ABCD مركزه O بحيث $AB = 4$.




1) أحسب OA و SA.

*) $OA = ?$



لدينا ABCD مربّع قيس طول ضلعه 4 إذن قيس طول قطره [AC]يساوي $4\sqrt{2}$.

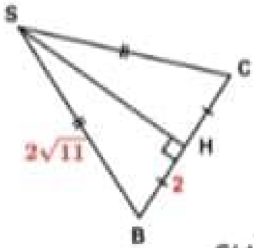
وبماأنّO منتصف [AC] فإنّ $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

*) $SA = ?$

لدينا SABCD هو هرم منتظم قمّته S وقيس طول ارتفاعه $h = SO = 6$ وشعاع الدّائرة المحيطة بقاعدته هو $r = OA = 2\sqrt{2}$ إذن أحرفه الجانبيّة [SA] و [SB] و [SC] و [SD] متقايسة ولنا:

$$SA = SB = SC = SD = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{8 + 36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

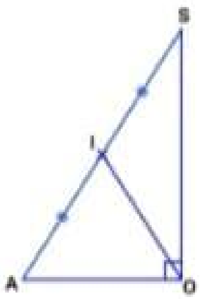
2) لتكن H منتصف [BC]. احسب SH.

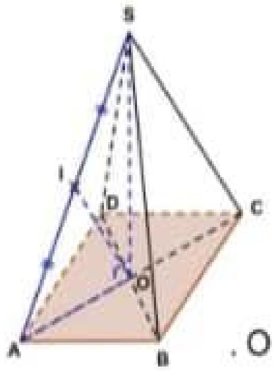



لدينا SABCD هو هرم منتظم قمّته S إذن المثلّث SBC هو مثلّث متقايس الضّلعين قمّته الرّئيسيّة S. وبما أنّ H منتصف القاعدة [BC] فإنّ المثلّث SHB قائم في H بحيث $SB = 2\sqrt{11}$ و $BH = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ إذن حسب نظريّة بيتاغور $SB^2 = SH^2 + BH^2$ ومنه $SH^2 = SB^2 - BH^2 = \left(2\sqrt{11}\right)^2 - 2^2 = 44 - 4 = 40$

وبالتّالي $SH = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

3) لتكن I منتصف [SA]. أحسب OI.




بما أنّ SABCD هو هرم منتظم قمّته S و مركز قاعدته O

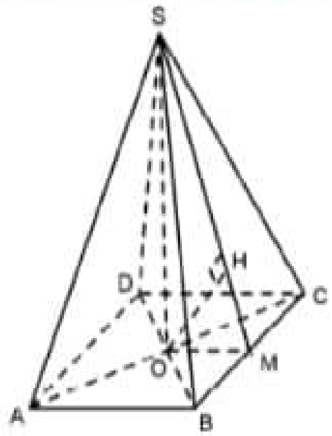
فإنّ المستقيم (SO) يعامد المستوي (ABC) في O.

وبما أنّ المستقيم (OA) محتو في المستوي (ABC) ويمرّ من O فإنّ $(SO) \perp (OA)$ وبالتّالي المثلّث SOA هو مثلّث قائم في O .

ونعلم أنّ I منتصف وتره [SA] إذن $IO = IA = IS = \frac{1}{2} SA = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{11} = \sqrt{11}$.

## إصلاح التمرين الثّالث :

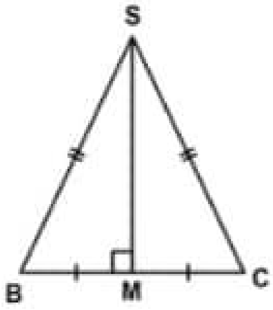
SABCD هرم منتظم قاعدته مربّع ABCD مركزه O و M منتصف [BC] بحيث $BC = 12$ و $SM = 8$.



الأستاذ: عبد القادر المنيف    إشراف و مراجعة المتفقّد : خالد الصّيد    س/د : 2019---2020

1) أحسب قيس مساحة المثلّث SBC واستنتج المساحة الجملية للهرم.

*) مساحة المثلّث SBC:




SABCD هو هرم منتظم قاعدته ABCD إذن المثلّث SBC هو مثلّث متقايس الضّلعين قمّته الرّئيسية S. وبما أنّ M منتصف القاعدة [BC] فإنّ [SM] هو الارتفاع الصّادر منS في المثلّث SBC وبالتّالي:

$S_{SBC} = \frac{SM \times BC}{2} = \frac{8 \times 12}{2} = 48$ .

*) المساحة الجمليّة للهرم:

نذكّر أنّ المساحة الجملية لهرم هي مجموع مساحات أوجهه الجانبيّة وقاعدته.

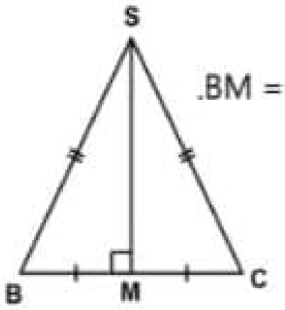
SABCD هو هرم منتظم إذن أوجهه الجانبيّة هي مثلّثات متقايسةوبماأنّ قاعدته مربّع فله 4 أوجه جانبيّة

- مساحة الوجه الجانبي SBCتساوي 48 (حسب ما سبق)
- مساحة القاعدة: قاعدة الهرم في هذا التّمرين هو المربّع ABCD. $S_{ABCD} = BC^2 = 12^2 = 144$.

المساحة الجملية للهرم: $S_T = 4\times S_{SBC} + S_{ABCD} = 4 \times 48 + 144 = 192 + 144 = 336$.

2) أحسب SB ثمّ SO واستنتج قيس حجم الهرم.

*) $SB = ?$ :



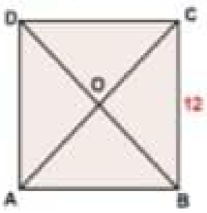

لدينا المثلّث SMB هو مثلّث قائم في M بحيث $SM = 8$ و $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 12 = 6$.

حسب نظريّة بيتاغور$SB^2 = SM^2 + BM^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

وبالتّالي $SB = \sqrt{100} = 10$.

*) $SO = ?$ :

SABCD هو هرم منتظم قمّته S و O مركز قاعدته ABCD إذن SO هو ارتفاعه و OB هو شعاع الدّارة المحيطة بقاعدته و [SB] هو أحد أحرفه الجانبيّة وبالتّالي: $SB^2 = SO^2 + OB^2$ ومنه $SO^2 = SB^2 - OB^2$.




- لنبحث أوّلا عنOB: لدينا ABCD مربّع قيس طول ضلعه 12

إذن قيس طول قطره [BD]يساوي $12\sqrt{2}$.

وبماأنّO منتصف [BD] فإنّ $OB = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

لدينا إذن: $SO^2 = SB^2 - OB^2 = 10^2 - (6\sqrt{2})^2 = 100 - 72 = 28$ وبالتالي $SO = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

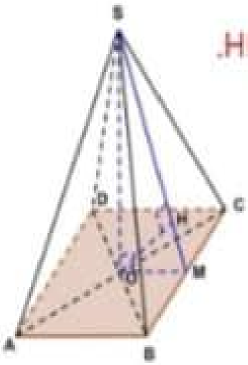
*) حجم الهرم :

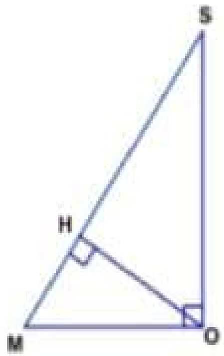
نذكّر أنّ حجم هرم مساحة قاعدته S وارتفاعه h هو: $V = \frac{1}{3} \times S \times h$.

مساحة القاعدة هي مساحة المربع ABCD : $S_{ABCD} = BC^2 = 12^2 = 144$

حجم الهرم SABCD: $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times SO = \frac{1}{3} \times 144 \times 2\sqrt{7} = 96\sqrt{7}$

3) لتكن H المسقط العمودي لـ O على (SM). أحسب OH و HM.



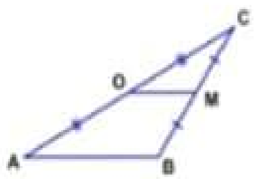


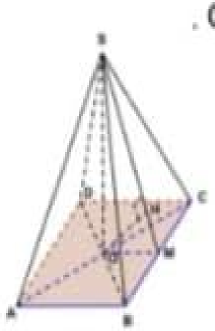
*) $OH = ?$ :

بما أنّ SABCD هو هرم منتظم قمّته S و مركز قاعدته O

فإنّ المستقيم (SO) يعامد المستوي (ABC) في O.

وبما أنّ المستقيم (OM) محتو في المستوي (ABC) ويمرّ من O فإنّ $(SO)\perp(OM)$ وبالتّالي المثلّث SOM هو مثلّث قائم في O. وبما أنّ H هو المسقط العمودي لـ O على (SM) فإنّ $OH \times SM = OS \times OM$ ومنه $OH = \frac{OS \times OM}{SM}$.

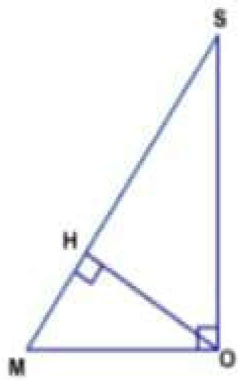




لنحدّد أوّلا OM : في المثلّث ABC لدينا O منتصف [AC] و M منتصف [BC]

إذن $OM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 12 = 6$

وبالتالي: $OH = \frac{OS \times OM}{SM} = \frac{2\sqrt{7} \times 6}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$



*) $HM = ?$ :

لدينا المثلّث OHM قائم في H. حسب نظريّة بيتاغور لدينا $OM^2 = HM^2 + HO^2$

ومنه $HM^2 = OM^2 - HO^2 = 6^2 - \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 36 - \frac{63}{4} = \frac{144}{4} - \frac{63}{4} = \frac{81}{4}$

وبالتالي $HM = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2} = 4.5$.

الأستاذ: عبد القادر المنيف إشراف و مراجعة المتفقّد : خالد الصّيد س/د : 2019---2020

4) أحسب HB واستنتج أنّ المثلّث OBH قائم الزّاوية.

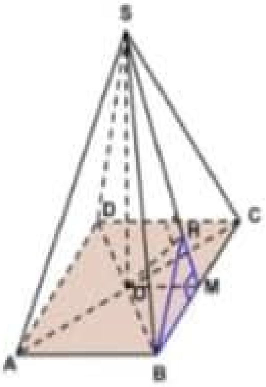
*) $HB = ?$ :

لدينا المثلّث HMB قائم في M .

حسب نظريّة بيتاغور

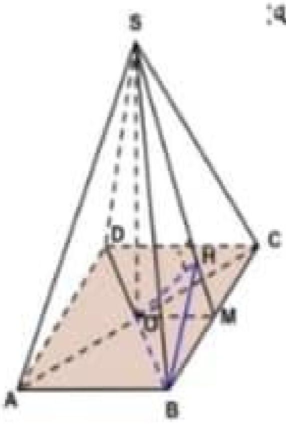
$$HB^2 = MH^2 + MB^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 6^2 = \frac{81}{4} + 36 = \frac{81}{4} + \frac{144}{4} = \frac{225}{4}$$

وبالتّالي $HB = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2} = 7.5$.



*) طبيعة المثلّث OBH :

في المثلّث OBH لدينا: $OB = 6\sqrt{2}$ ، $HB = \frac{15}{2}$ و $OH = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ ومنه:



- $OB^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$.
- $HB^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}$.
- $OH^2 = \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{63}{4}$.
- OB هو أكبر الأبعاد

لدينا إذن $HB^2 + OH^2 = \frac{225}{4} + \frac{63}{4} = \frac{288}{4} = 72 = OB^2$.

حسب عكس نظريّة بيتاغور المثلّث OBH قائم وتره [OB] أي قائم في H.