



تمرين عدد 06:

(1) ليكن $x \in \mathbb{R}_+$ و $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن $\sqrt[n]{x^{2n}} = x^n$.

(2) اكتب في صيغة قوة عدد صحيح طبيعي:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^{-8} \times (\sqrt{13})^8$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-10}$$

$$\sqrt{3}^4$$

$$(0.5)^{-3}$$

$$(-\sqrt{2})^{12}$$

اكتب في صيغة قوة عدد حقيقي:

تمرين عدد 07:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$$

$$(-\sqrt{3})^5 \times (-\sqrt{3})^{-7}$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{\pi}\right)^{-6} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-5} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-6}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-12}$$

اكتب في صيغة قوة عدد حقيقي:

تمرين عدد 08:

$$\frac{(-9\pi)^{12}}{(3\pi)^{12}}$$

$$\frac{8^{-4}}{2^{-4}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9}{\left(\frac{3}{2}\right)^9}$$

$$\frac{(-3\sqrt{15})^{-7}}{(-2\sqrt{3})^{-7}}$$

$$\frac{(-\sqrt{24})^{-11}}{(-\sqrt{8})^{-11}}$$





MATH⁺⁺

9 كتاب الرياضيات التاسعة أساسي الثلاثي الثاني



+216 21 829 926

f /Mathplus





سلسلة تمارين القوى في $\mathbb{R}$

تمرين عدد 01 : احسب: $(-2\sqrt{7})^3$ ، $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^4$ ، $(\sqrt{2})^2$ ، -10^3 ، $\left(-\frac{109}{11}\right)^0$ ، $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$ ، $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$ ، $(-2)^3$

تمرين عدد 02 : احسب: $(-1)^{-11}$ ، $(-\sqrt{2})^{-2}$ ، $(-0.5)^{-3}$ ، $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ ، $(-\sqrt{3})^{-1}$ ، -10^{-6}

$$(-2\sqrt{5})^{-3} \text{ ، } \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$$

تمرين عدد 03 : ضع العلامة $\square$ أمام الإجابة الصحيحة:

(أ) إذا كان $a \in \mathbb{R}^*$ و $n \in \mathbb{Z}$ و $p \in \mathbb{Z}$ فإن: $\square (a^n)^p = a^{n-p}$ $\square (a^n)^p = a^{n \times p}$ $\square (a^n)^p = a^{n+p}$

(ب) إذا كان $b \in \mathbb{R}^*$ و $n \in \mathbb{Z}$ و $m \in \mathbb{Z}$ فإن: $\square \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ $\square \frac{b^n}{b^m} = b^{n+m}$ $\square \frac{b^n}{b^m} = b^{n \times m}$

تمرين عدد 04 : اكتب في صيغة قوة عدد حقيقي:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5} \times (-\sqrt{5})^{-5} \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-5}$$

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(-\frac{3}{7}\right)^4$$

$$(-\sqrt{7})^5 \times \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^5$$

$$(2\pi)^{-11} \times \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{-11}$$

تمرين عدد 05 : اكتب في صيغة قوة عدد حقيقي:

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^{16} \times \left[\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2\right]^8 \times \left[\left(\frac{3}{11}\right)^{-4}\right]^{-4}$$

$$\left[\left(-\frac{8}{7}\right)^3\right]^5$$

$$\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^6 \times \left[(\sqrt{3})^{-3}\right]^{-4} \times \left[\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-3}\right]^{-4}$$

$$\left[(-\sqrt{3})^{-2}\right]^7$$





تمرين عدد 09 : احسب العبارات التالية:

$$B = \frac{1}{5^{-2}} \times \frac{7^2}{3^2} \times \frac{25}{7^{-1}} \times \frac{3}{5^3} \times \left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$$

$$A = \sqrt{5}^4 \times 5^{-2} \times 25 \times 5^{-3} \times (-\sqrt{5})^{-5}$$

$$D = \frac{5^4}{27} \times \frac{11}{5^2} \times 3^{-5} \times 11^{-3} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$$

$$C = (2\sqrt{2})^{-3} \times (\sqrt{2})^2 \times 2^{-2} \times \sqrt{2}$$

تمرين عدد 10 : احسب العبارات التالية:

$$Y = \frac{2^{19} - 2^6}{2^{21} - 2^8}$$

$$X = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times 15^2 \times \left(\frac{9}{5}\right)^3}{\left(\frac{3}{2}\right) \times 5 \times (-2)^2 \times \left(\frac{5}{9}\right)^3}$$

$$T = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \times \frac{5}{(\sqrt{3})^4} \right]^{-3} - \left[(\sqrt{5})^{-2} \times 5^5 \right]$$

تمرين عدد 11 : أوجد العدد الصحيح النسبي n في كل حالة من الحالات التالية:

$$(\sqrt{2})^3 \times 2\sqrt{2} \times 2^n = (\sqrt{2})^4 \quad (1)$$

$$2^{-3} \times \pi^5 \times 2^n = (2\pi)^5 \quad (2)$$

$$(3^2 \times 5)^3 \times (3 \times 5^2)^3 = \frac{1}{(15)^n} \quad (3)$$

$$\frac{(\sqrt{3})^{-5}}{(\sqrt{5})^5} \times \frac{(\sqrt{5})^3}{\sqrt{3}} \times \left(\sqrt{3} \times (\sqrt{5})^2\right)^n = (\sqrt{15})^{-10} \quad (4)$$





تمرين عدد 12:

(1) بين أن: $\frac{(2a^{-2})^{-3} \times (ab^5)^2 \times (b^{-3})^2}{8^{-1} \times (a^2b)^4} = 1$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}^*$

(2) بين أن $\frac{(a\sqrt{3})^3 \times b^{-2} \times (3ab)^2}{81 \times (ba^{-2})^{-4} \times (a^3b^{-4})^{-1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}^*$

تمرين عدد 13: لنكن العبارة التالية: $X = \frac{(a^{-3}b^{-4})^2 \times (a^2b^{-3})}{a^4 \times (a^{-2}b^{-3})^3}$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}^*$

(1) بين أن $X = a^{-2}b^{-2}$

(2) احسب X إذا كان $a = \sqrt{2}$ و $b = -\sqrt{3}$

(3) احسب X إذا كان a مقلوب b .

(4) أوجد a إذا علمت أن $a = b$ و $X = 1$

تمرين عدد 14: باقي القسمة الاقليدية لعدد طبيعي n على 8 هو 3.

لنعتبر a عددا حقيقيا حيث $a^2 = \sqrt{2}$

(1) أثبت أن $a^{n+1} \in \mathbb{IN}$

(2) جد n حيث $a^{n+1} = 128$.





التمرين الأول :

أحسب :

$$A = (\sqrt{5} + 2)^2 = \dots\dots\dots$$

$$B = (7 + \sqrt{3})^2 = \dots\dots\dots$$

$$C = (4 - \sqrt{7})^2 = \dots\dots\dots$$

$$D = (\sqrt{5} - 1)^2 = \dots\dots\dots$$

$$E = (\sqrt{13} - 3)(\sqrt{13} + 3) = \dots\dots\dots$$

$$F = (4 + \sqrt{11})(4 - \sqrt{11}) = \dots\dots\dots$$

$$G = (\sqrt{5} + 3)^2 + (5 - \sqrt{5})^2 = \dots\dots\dots$$

$$H = (\sqrt{11} + 5)^2 - (3 - \sqrt{11})^2 = \dots\dots\dots$$

التمرين الثاني :

أحسب العبارات التالية :

$$(2\sqrt{5} + 1)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(5\sqrt{2} - 6)(5\sqrt{2} + 6) = \dots\dots\dots$$

$$(4 + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 4) = \dots\dots\dots$$

$$(4\sqrt{3} + 5)^2 + (4\sqrt{3} - 5)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(2\sqrt{7} - 3\sqrt{3})^{15} (2\sqrt{7} + 3\sqrt{3})^{15} = \dots\dots\dots$$

$$(5 - 2\sqrt{6})^{21} (5 + 2\sqrt{6})^{19} = \dots\dots\dots$$





التمرين الأول : ① أحسب ما يلي

$$A = \left(2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - 3\sqrt{2}\right)^2$$

$$C = (2\sqrt{5} - 2\pi)^2$$

$$D = (2\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2} - \sqrt{2})^2$$

② أنشر و أختصر العبارات التالية

$$A = \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - x\sqrt{2}\right)^2$$

$$C = (\sqrt{5x} - 2\sqrt{2})^2$$

$$D = (2\sqrt{2} + x)^2 - (3x - \sqrt{2})^2$$

③ فكك إلى جذاء عوامل العبارات التالية

$$(3x + 1)^2 - (x - 1)^2$$

$$(3x - 1)^2 + 9x^2 - 1$$

$$16x^2 - 8x + 1 - (4x - 1)(x + 2)$$





التمرين الثالث

لتكن العبارتين التاليتين $a = \sqrt{7} + 2\sqrt{2}$ و $b = 2\sqrt{2} - \sqrt{7}$

أ - أحسب

$$a^2 = \dots\dots\dots$$

$$b^2 = \dots\dots\dots$$

$$ab = \dots\dots\dots$$

ب - أثبت أن: $a^{-2} - b^{-2} = -8\sqrt{14}$

ج - أحسب

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{3}{a} - \frac{5}{b} = \dots\dots\dots$$

التمرين الرابع

نعتبر العبارتين: $a = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ و $b = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

(1) بيـن أن : $a + b = 10$ و $a - b = 4\sqrt{6}$

(2) بيـن أن a مقلوب b

(3) بيـن أن : $ba^3 - ab^3 = 40\sqrt{6}$





التمرين الثاني :

لتكن عبارتان A و B حيث x

$$A = (3x+1)^2 - (x-2)^2 \quad \text{و} \quad B = (16x^2 - 8x + 1) - (4x-1)(x+2)$$

(1) أنشر ثم اختصر العبارة A

(2) أحسب العبارة A إذا علمت أن $x = \sqrt{2}$

(3) أكتب A و B على شكل جذاء عوامل

(4) أوجد x إذا علمت أن $A - B = 0$





التمرين الثالث :

لتكن العبارة $A = (x - 1)^2 - 4$

1. أحسب A في حالة $x = 0$

2. بيّن أن $A = (x + 1)(x - 3)$

ب. جد الأعداد الحقيقية x بحيث $(x - 1)^2 = 4$

3. نعتبر العبارة $B = A - x^2 + 3$

أ. بيّن أن $B = -2x$

ب. أحسب إذن $b = 1111 \times 1107 - 1110^2 + 3$





(1) فكك إلى جذاء عوامل.

$$a = x^2 - 6x + 9 + (6 - 2x)(x - 7)$$

$$b = x^2 - x + \frac{1}{4} + (1 - 2x)(3x - 5)$$

$$c = (3 - 2x)^2 - 9(3x + 1)^2$$

$$d = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + (\sqrt{8}x + 4)(x - 2\sqrt{2})$$





$$e = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{16} + (4x + 3)(5x - 2)$$

$$f = (5x - 1)^2 - (3x + 6)^2 + (2x - 7)(x + 8)$$

$$g = (x + 3)^2 + (2x + 2)(x + 3) + (x + 1)^2$$

$$h = 4(3x - 1)^2 - 25(x - 1)^2$$

$$i = 4x^2 - 16x + 16 + (x - 2)(3x + 1)$$

+216 21 829 926

/Mathplus

MATH

Formation d'été
Cahier de mathématiques

9^{ème} année

9^{ème} année

/Mathplus

+216 21 829 926



+216 21 829 926

/Mathplus





التمرين الأول:

نعتبر العبارتين $E = 2x^2 + 6\sqrt{2}x + 5$ و $F = (\sqrt{2}x - 3)(\sqrt{2}x + 1)$ حيث x عدد حقيقي .
(1) أ) احسب E إذا علمت ان $x = -\sqrt{2}$.

ب) احسب F إذا علمت ان $x = 1$.

(2) أ) بين ان : $E = (\sqrt{2}x + 3)^2 - 4$.

ب) استنتج تفكيكا للعبارة E .

(3) بين ان $E + F = 2(\sqrt{2}x + 1)^2$.

(4) أ) أوجد العدد الحقيقي x الذي يحقق $2x^2 + 6\sqrt{2}x + 5 = (3 + \sqrt{2}x)(\sqrt{2}x + 1)$.

ب) أوجد العدد الحقيقي x الذي يحقق $\sqrt{E + F} = 2\sqrt{2}$.





التمرين الثاني :

نعتبر العبارات التالية: $A = (2x - 1)^2 - (x + 3)^2$ و $B = 4x^2 - 13x - 12$ و $C = x^2 - 8x + 16$ حيث x عدد حقيقي .

(1) أ) انشر ثم اختصر العبارة A .

ب) احسب القيمة العددية للعبارة A في حالة $x = 0$

(2) بين أن $B = (4x + 3)(x - 4)$.

(3) أ) فكك A و C إلى جذاء عوامل .

ب) بين أن $A + B + C = (x - 4)(8x + 1)$.

ج) بين أنه إذا كان A و $B + C$ متقابلان فإن $x = 4$ أو $x = -\frac{1}{8}$.





التمرين الثالث :

نعتبر العبارتين التاليتين: $A = -3x^2 - x + 2$ و $B = 7 + 6x - x^2$ حيث x عدد حقيقي .
(1) بين أن $A = (2 - 3x)(x + 1)$

(2) أ بين أن $B = 16 - (3 - x)^2$.

(ب) استنتج تفكيكا إلى جذاء عوامل للعبارة B .

(3) أ بين أن $A + B = (x + 1)(9 - 4)$.

(ب) أوجد العدد الحقيقي x إذا كان A و B متقابلان .

(4) أ احسب القيمة العددية لكل من العبارتين A و B في حالة $x = \sqrt{2}$





الترتيب و المقارنة

I _ مقارنة عددين حقيقيين :

(1) - قاعدة ① :

a و b عدنان حقيقيان .
إذا كان $a - b \leq 0$ فإن $a \leq b$
إذا كان $a - b \geq 0$ فإن $a \geq b$

(2) - أمثلة :

(1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

لدينا :

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3}-4) - (\sqrt{3}-5) &= 2\sqrt{3}-4-\sqrt{3}+5 \\ &= 2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4 \\ &= \sqrt{3}+1\end{aligned}$$

وبما أن : $\sqrt{3}+1 \geq 0$ فإن : $(2\sqrt{3}-4) - (\sqrt{3}-5) \geq 0$

و منه فإن : $2\sqrt{3}-4 \geq \sqrt{3}-5$

(2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x = y - 3$

لدينا : $x - y = -3$

وبما أن : $-3 \leq 0$ فإن : $x - y \leq 0$

و منه فإن : $x \leq y$

II _ الترتيب و المقارنة :

(1) - الترتيب و الجمع :

(أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a+c \leq b+c$
إذا كان $a \geq b$ فإن $a+c \geq b+c$





* مثال :

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x < 3$.

لنقارن العددين -2 و $x - 5$.

لدينا : $x < 3$

يعني أن : $x + (-5) < 3 + (-5)$

$$x - 5 < 3 - 5$$

و بالتالي فإن : $x - 5 < -2$

(ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{ إذا كان } a + c \leq b + d \text{ فإن}$$

* مثال :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $x < 3$ و $2 > y$.

لنبين أن : $x + y < 5$.

$$\left. \begin{array}{l} x < 3 \\ y < 2 \end{array} \right\} \text{ لدينا } \left. \begin{array}{l} x < 3 \\ 2 > y \end{array} \right\} \text{ يعني أن :}$$

$$x + y < 2 + 3$$

و بالتالي فإن : $x + y < 5$

(2) - الترتيب و الضرب :

(أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .

إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن $a \times c \leq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن $a \times c \geq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن $a \times c \leq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن $a \times c \geq b \times c$

* مثال :

$$11 \leq 27 \text{ لدينا } \text{ يعني أن } 11 \times 5 \leq 27 \times 5$$

$$11 \leq 27 \text{ يعني أن } 11 \times (-4) \geq 27 \times (-4)$$

+216 21 829 926

/Mathplus





(ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{ إذا كان } \left. \begin{array}{l} \text{و} \\ \text{فإن} \end{array} \right\} a \times c \leq b \times d$$

* مثال :

x و y عدنان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$.

لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$.

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array} \right\} \text{ يعني أن } x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$

$$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$$

$$xy < 2\sqrt{18}$$

$$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$$

$$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$$

$$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$$

$$xy < 6\sqrt{2} \text{ وبالتالي فإن :}$$

(3) – الترتيب و المقلوب :

(أ) -- خاصية :

a و b عدنان حقيقيان موجبان قطعا .

$$\text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$\text{إذا كان } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ فإن } a \leq b$$

(ب) -- مثال :

$$\text{لدينا : } 7 \leq 13 \text{ يعني أن } \frac{1}{7} \geq \frac{1}{13}$$

$$11 \geq 5 \text{ يعني أن } \frac{1}{11} \leq \frac{1}{5}$$

+216 21 829 926

/Mathplus





(4) - الترتيب و المربع :

(أ) -- خاصية ① :

a و b عدنان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$
إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$$5 \leq 11 \text{ يعني أن } 5^2 \leq 11^2 \text{ أي } 25 \leq 121$$

(ب) -- خاصية ② :

a و b عدنان حقيقيان سالبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$
إذا كان $a^2 \geq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$$-7 \leq -2 \text{ يعني أن } (-7)^2 \geq (-4)^2 \text{ أي } 49 \geq 16$$

(5) - الترتيب و الجذر المربع :

(أ) -- خاصية :

a و b عدنان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

* أمثلة :

$$(1) - \text{لنقارن العددين : } \sqrt{10} \text{ و } 3\sqrt{3}$$

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{10}^2 = 10 \\ (3\sqrt{3})^2 = 27 \end{array} \right\} \text{ إذن } \sqrt{10}^2 \leq (3\sqrt{3})^2 \text{ و منه فإن } \sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$$

$$(2) - \text{لنقارن العددين : } -\sqrt{6} \text{ و } -3\sqrt{2}$$

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{6}^2 = 6 \\ (3\sqrt{2})^2 = 18 \end{array} \right\} \text{ إذن } \sqrt{6}^2 \leq (3\sqrt{2})^2 \text{ و منه فإن } \sqrt{6} \leq 3\sqrt{2} \text{ . وبالتالي فإن : } -\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}$$





III_ التّأطير :

(1) - تأطير مجموع عددين :

$$\begin{aligned} & \text{ا } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ اعداد حقيقية بحيث :} \\ & x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t \\ & x + z \leq a + b \leq y + t \end{aligned}$$

* مثال :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 8 \text{ و } -4 \leq y \leq 2$$

لنؤطر $x + y$.

$$\text{لدينا : } 3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$$

$$\text{إذن : } -1 \leq x + y \leq 10$$

(2) - تأطير مقابل عدد حقيقي :

$$\begin{aligned} & \text{ا } a \text{ عدد حقيقي بحيث : } x \leq a \leq y \\ & \text{سيكون لدينا : } -y \leq -a \leq -x \end{aligned}$$

(3) - تأطير فرق عددين :

$$\begin{aligned} & \text{ا } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ اعداد حقيقية بحيث :} \\ & x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t \\ & x - t \leq a - b \leq y - z \end{aligned}$$

* ملاحظة هامة :

$$\text{لتأطير } a - b, \text{ نضع : } a - b = a + (-b) \text{ ثم نطبق القاعدتين أعلاه.}$$

$$\begin{aligned} & \text{* مثال : } x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 8 \text{ و } -4 \leq y \leq 2 \\ & \text{لنؤطر } x - y \end{aligned}$$

$$\text{لدينا : } -2 \leq -y \leq 4 \text{ و } 3 \leq x \leq 8$$

$$\text{إذن : } 3 - 2 \leq x + (-y) \leq 8 + 4$$

$$\text{و منه فإن : } 1 \leq x - y \leq 12$$







(4) - تأطير جداء عددين :

$$a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية موجبة بحيث :}$$

$$z \leq b \leq t \text{ و } x \leq a \leq y$$

$$x \times z \leq a \times b \leq y \times t$$

* مثال 1 :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 7 \text{ و } 1 \leq y \leq 3$$

لنؤطر $x \times y$.

لدينا :

$$3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$$

$$\text{إذن : } 3 \leq x \times y \leq 21$$

* مثال 2 :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } -5 \leq x \leq -2 \text{ و } 3 \leq y \leq 6$$

لنؤطر $x \times y$.

لدينا :

$$2 \leq -x \leq 5$$

إذن :

$$2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6 \text{ أي } 6 \leq -xy \leq 30$$

$$\text{و منه فإن : } -30 \leq xy \leq -6$$

(5) - تأطير مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

$$a \text{ و } x \text{ و } y \text{ أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : } x \leq a \leq y$$

سيكون لدينا : $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$

(6) - تأطير خارج عددين :

$$a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية بحيث : } t \neq 0 \text{ و } z \neq 0 \text{ و } b \neq 0$$

$$\text{و } x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t$$

سيكون لدينا : $\frac{x}{t} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{y}{z}$





* تمرين تطبيقي :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث :

$$6 \leq a \leq 8 \quad \text{و} \quad -4 \leq b \leq -2 \quad \text{و} \quad -3 \leq c \leq 5$$

أطّر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحل :

(1) - تأطير a^2 :

لدينا : $6^2 \leq a^2 \leq 8^2$ و منه فإن : $36 \leq a^2 \leq 64$

(2) - تأطير b^2 :

لدينا : $(-4)^2 \leq b^2 \leq (-2)^2$ و منه فإن : $4 \leq b^2 \leq 16$

(3) - تأطير $a+2b-4c$:

لدينا : $-8 \leq 2b \leq -4$ و $-4 \times (-3) \leq -4c \leq -4 \times 5$ أي $12 \leq -4c \leq 20$

إذن : $6 + (-8) + 12 \leq a + 2b - 4c \leq 8 + (-4) + 20$

و منه فإن : $10 \leq a + 2b - 4c \leq 24$

(4) - تأطير $\frac{a+b}{b^2}$:

لدينا : $6 + (-4) \leq a + b \leq 8 + (-2)$ أي $2 \leq a + b \leq 6$

و $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$

إذن : $2 \times \frac{1}{16} \leq (a+b) \times \frac{1}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}$





الترتيب و المقارنة

التمرين الثالث :

نعتبر العددين الحقيقيين التاليين : $a = \sqrt{45} - (\sqrt{20} - 1)$ و $b = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{24}}{\sqrt{6}}$

أ- بين أن : $a = \sqrt{5} + 1$ و $b = \sqrt{3} + 2$

ب- احسب a^2 و b^2

ت- قارن بين $4\sqrt{3}$ و $2\sqrt{5}$ ثم استنتج مقارنة بين a^2 و b^2

ث- بين أن : $a < b$ ثم استنتج أن $a < \frac{a+b}{2} < b$





التمرين الثاني :

نعتبر العددين الحقيقيين a و b التاليين :

$$a = \frac{12\sqrt{2} - 18}{\sqrt{18}} \quad \text{و} \quad b = \sqrt{14} + \sqrt{45} - \sqrt{20} - 3\sqrt{5}$$

ا- بين ان $a = 2 - 1,5\sqrt{2}$ و $b = \sqrt{14} - 2\sqrt{5}$.

ب- ماهي علامة كل من a و b ؟ علل جوابك.

ت- احسب a^2 و b^2 .

ج- قارن بين a^2 و b^2 ثم استنتج مقارنة بين a و b .





التمرين الرابع :

1) أ- قارن 5 و $2\sqrt{5}$

ب- استنتج مقارنة العددين التاليين في كلّ حالة من الحالات التالية:

7 و $2\sqrt{5} + 2$ /*

$\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{2\sqrt{5} + 2}$ /*

2) a و b عددان حقيقيّان بحيث $a = 1 - \sqrt{6}$ و $b = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

أ- بيّن أنّ a و b سالبان.

ب- قارن a^2 و b^2

ت- استنتج مقارنة a و b





(1) أ) قارن العددين 4 و $\sqrt{11}$

ب) استنتج مقارنة للعددين: 9 و $1+2\sqrt{11}$

(2) نعتبر العددين X و Y حيث: $X = 13 - 2\sqrt{12}$ و $Y = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{5}{2+\sqrt{3}}$

أ) بين أن: $X = 13 - 4\sqrt{3}$ و $Y = 12 - 4\sqrt{3}$

ب) قارن X و Y

ج) استنتج مقارنة لـ $-3X+5$ و $-3Y+7$





(1) أ) قارن العددين $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{10}$

ب) استنتج مقارنة للعددين: $-5\sqrt{3}$ و $\sqrt{3} - 3\sqrt{10}$

(2) نعتبر العددين a و b حيث: $a = \frac{\sqrt{36} + \sqrt{8}}{2}$ و $b = \frac{3}{\sqrt{2}-1} - \frac{2}{\sqrt{2}+1}$

أ) بين أن: $a = 3 + \sqrt{2}$ و $b = 5 + \sqrt{2}$

ب) قارن a و b

ج) استنتج مقارنة لـ $\frac{-3}{2}a + \sqrt{5}$ و $\frac{-3}{2}b + \sqrt{3}$

د) استنتج مقارنة لـ $-\frac{1}{a} + \sqrt{2}$ و $-\frac{1}{b} + \sqrt{2}$





الشرح (المعنى):

قارن بين $\frac{11}{3} + 7\sqrt{3}$ و $\frac{5}{2} + 7\sqrt{3}$

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا حيث $a \geq b$.

(1) قارن بين $-\sqrt{3}b + 5$ و $-\sqrt{3}a + 5$

(2) استنتج مقارنة لـ $\frac{2}{-\sqrt{3}b+5}$ و $\frac{2}{-\sqrt{3}a+5}$

(3) قارن بين $\frac{1}{b} + \frac{11}{3} + 7\sqrt{3}$ و $\frac{1}{a} + \frac{5}{2} + 7\sqrt{3}$





التمرين (المابـــــــــــــــــع) :

نعتبر العدد الحقيقي : $a = \sqrt{50} - \sqrt{8}(\sqrt{2} + 1)$

1. بين أن: $a = 3\sqrt{2} - 4$.

أ- قارن العددين 4 و $3\sqrt{2}$ ثم استنتج أن: a عدد موجب.

ب- اثبت أن: $(3\sqrt{2} - 4)^2 = 34 - 24\sqrt{2}$ ثم استنتج مقارنة العددين: $24\sqrt{2}$ و 34.

2. نعتبر العددين: $x = \frac{7}{\sqrt{2} + 1}$ و $y = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

أ. بين أن: $x - y = 2a$.

ب. استنتج مقارنة العددين: x^{-2} و y^{-2} .





مبرهنة فيثاغورس

I_ مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

(1) - خاصية :

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A
فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

(2) - مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في C بحيث : $AC = 2\sqrt{2}$ و $AB = 10$.
لنحسب BC .

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في C فإن : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة)

$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$= 10^2 - (2\sqrt{2})^2$$

$$= 100 - 8$$

$$= 92$$

و منه فإن :

$$BC = \sqrt{92}$$

$$= \sqrt{4 \times 23}$$

$$= 2\sqrt{23}$$

II_ مبرهنة فيثاغورس العكسية :

(1) - خاصية :

إذا كان ABC مثلثا بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$
فإن : ABC قائم الزاوية في A .

(2) - مثال :

EFG مثلث بحيث : $EF = 10$ و $FG = 8$ و $CG = 6$

لنبين أن EFG مثلث قائم الزاوية .





لدينا :

$$EF^2 = 10^2 = 100$$

$$EG^2 = 6^2 = 36$$

$$FG^2 = 8^2 = 64$$

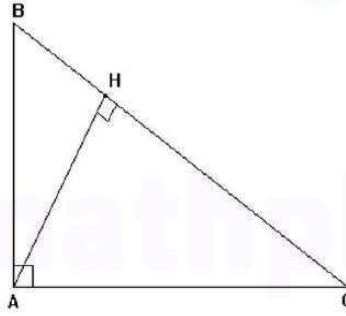
$$100 = 36 + 64 \quad \text{نلاحظ أن :}$$

$$EF^2 = EG^2 + FG^2 \quad \text{أي :}$$

وحسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن EFG مثلث قائم الزاوية في G .

III - نتائج :

ABC مثلث قائم الزاوية في A و H الفمسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .



سيكون لدينا :

$$AB \times AC = AH \times BC$$

$$AH^2 = HB \times HC$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times CB$$

نسمي هذه العلاقات : العلاقات المترتبة في المثلث القائم الزاوية .





التمرين الثاني :

ابن دائرة Γ مركزها O وشعاعها 4 سم و $[BC]$ قطرها لها . المتوسط العمودي لـ $[OB]$ يقطع الدائرة Γ في نقطتين أحدهما A ويقطع $[OB]$ في النقطة H .
(1) بيّن أنّ المثلث OAB متقايس الأضلاع .

(2) أحسب البعد AH

(3) ابن المستقيم Δ المماس للدائرة Γ في النقطة B .
 Δ يقطع (OA) في النقطة E .

أ - بيّن A منتصف $[OE]$.

ب - أحسب البعد OE ثم EB

(4) أحسب AC .

(5) لتكن K المسقط العمودي لـ H على (AC) . أحسب HK .





العلاقات القياسية في المثلث القائم

التمرين الأول :

- (1) أرسم مستطيلا ABCD حيث : $AB = 3$
و $BC = 10$ و M نقطة من [AD] حيث $AM = 4$.
انجز الرسم ثم أحسب البعد MB

- (2) عيّن على نصف المستقيم [DC) النقطة E حيث $CE = 5$.
أ - أحسب BE ثم ME .

- ب - استنتج أنّ المثلث BME قائم الزاوية في M

- ج - ابن النقطة H المسقط العمودي لـ M على (BE) . ثم أحسب MH.

- (3) لتكن G نقطة تقاطع (MB) و (ED) .
أ - بين أنّ $\frac{MG}{MB} = \frac{MD}{MA}$ ثم استنتج البعد MG .

- ب - أحسب GD .

- ج - استنتج أنّ المثلث GBE متقايس الضلعين قمته الرئيسيّة G .





التمرين الثالث :

ليكن MNP مثلث حيث : $MN = 2$ و $NP = 6$ و $MP = 4\sqrt{2}$
(1) أ - أثبت أنّ المثلث MNP قائم . ثم حدّد الزاوية القائمة .

ب - أرسم المثلث MNP (أترك آثار البركار) .

(2) عيّن على نصف المستقيم $[MN]$ نقطة K حيث $NK = 6$ ، ثم بيّن أنّ : $PK = 4\sqrt{6}$.

(3) لتكن L منظرية K بالنسبة إلى N .
- بيّن أنّ المثلث PLK قائم في P . ثم أحسب PL .

(4) لتكن H المسقط العمودي لـ M على (NP) ، أحسب MH .

(5) الموازي لـ (LP) والمار من N يقطع (KP) في F . بيّن أنّ F منتصف $[KP]$ ثم أحسب NF .





الشرح الرابع :

ليكن MNP مثلث قائم الزاوية في P حيث : $PM = 4$ و $MN = 8$

(1) أ - أثبت أن $PN = 4\sqrt{3}$

ب - ابن المثلث MNP (أترك آثار البركار)

ج - لتكن K المسقط العمودي لـ P على (MN) .

أحسب PK و MK .

د - لتكن E منتصف $[MN]$. أثبت أن $KE = 2$

(2) أ - أحسب PE .

ب - استنتج أن المثلث PME متقايس الأضلاع

ج - لتكن F منتصف $[PM]$. أحسب EF .

(3) (PK) و (EF) يتقاطعان في G . أحسب EG .





التمرين الخامس :

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB=4$ و H المسقط العمودي للنقطة A على [BC].

(1) بين أن $AH = 2\sqrt{3}$

(2) عيّن النقطة D حيث C منتصف القطعة [DB].

(أ) بين أن المثلث ABD قائم الزاوية في A

(ب) بين أن $AD = 4\sqrt{3}$

(3) ليكن [HK] الارتفاع الصادر من H للمثلث ADH. بين أن : $HK=3$

(4) الموازي لـ (AB) و المار من C يقطع (AD) في النقطة M.

(أ) بين أن M منتصف القطعة [AD].

(ب) أحسب MC

(5) المستقيمان (AC) و (BM) يتقاطعان في النقطة G. أحسب AG معللا جوابك.





التمرين (الساكن) :

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB=3$
و H المسقط العمودي للنقطة A على [BC].

(1) بيّن أن $AH = \frac{9}{2\sqrt{3}}$

(2) عيّن النقطة D حيث C منتصف القطعة [DB].
(أ) بين أن المثلث ABD قائم الزاوية في A .

(ب) بين أن $AD = 3\sqrt{3}$

(3) ليكن [HK] الارتفاع الصادر من H للمثلث ADH. بيّن أن : $HK= 2,25$

(4) الموازي لـ (AB) و المار من C يقطع (AD) في النقطة M .
(أ) بين أن M منتصف القطعة [AD].

(ب) أحسب MC .





التمرين السابع :

ليكن ABC مثلث حيث : $AB = 2$

و $BC = 6$ و $AC = 4\sqrt{2}$

(1) أ - أثبت أن المثلث ABC قائم في A .

ب- أرسم المثلث ABC (أترك آثار البركار) .

(2) عيّن على نصف المستقيم (AB) نقطة E حيث $BE = 6$ ، ثم بيّن أن : $CE = 4\sqrt{6}$.

(3) لتكن D منظرية E بالنسبة إلى B .

أ - بيّن أن المثلث CDE قائم في C .

ب - أحسب CD

(4) لتكن H المسقط العمودي لـ A على (BC) ، أحسب AH .

(5) عيّن نقطة M من $[BC]$ حيث $MB = 2$ ،

المستقيم المار من M و العمودي على (BC) يقطع نصف الدائرة التي قطرها $[BC]$ في نقطة N .

بيّن أن : $MN = 2\sqrt{2}$.





لتكن $[AB]$ قطعة مستقيم حيث $AB = 8\text{cm}$

(1) ابن Δ المتوسط العمودي لـ $[AB]$.

عين النقطة O منتصف $[AB]$ و

النقطة P على المستقيم Δ حيث $OP = OA$.

(2) بين أن المثلث PAB قائم الزاوية و متقايس الضلعين
و حدد مركز الدائرة $\odot$ المحيطة به.

(3) المستقيم المار من O و الموازي لـ (AP) يقطع (PB) في النقطة M .
بين أن M منتصف $[BP]$.

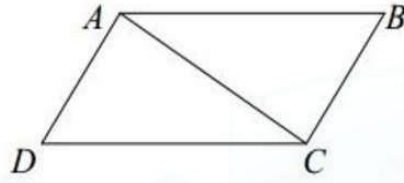
(4) المستقيمان (AM) و Δ يتقاطعان في النقطة G .
أ- بين أن G هي مركز ثقل المثلث PAB .

ب- أكتب AG بدلالة AM .

(5) المستقيم المار من M و العمودي على (AB) يقطع (AP) في النقطة H .

$$\text{بين أن } \frac{AP}{AH} = \frac{2}{3}$$





$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O حيث $AD = 3cm$ و $AC = 4cm$ و $CD = 5cm$.
1- بين أن المثلث ADC قائم.

2- بين أن $BD = 2\sqrt{13}$

3- ليكن I منتصف $[CD]$. (AI) يقطع (BD) في E . بين أن : $AE = \frac{5}{3}$

4- لتكن الدائرة (γ) ذات القطر $[CD]$.
ا- بين أن $A \in (\gamma)$.

ب- (BD) يقطع الدائرة (γ) في نقطة ثانية H ماذا يمثل $[CH]$ بالنسبة إلى المثلث OBC

ج- بين أن $CH = \frac{6}{\sqrt{13}}$ و احسب HB و HD .

5- (CH) يقطع (AB) في M . بين أن : $\frac{BM}{CD} = \frac{9}{17}$ واستنتج البعد : BM .





(C) هي دائرة مركزها O و شعاعها 3 و [AB] قطرها.

لتكن M نقطة من (C) بحيث $BM=4$

و H المسقط العمودي ل M على (AB)

(1) برهن أن المثلث AMB قائم الزاوية في M

ثم احسب AM و MH و AH

(2) عين النقطة D بحيث M تكون منتصف [BD] ، المستقيم المار من D و العمودي على (AB) يقطع (AB) في C و (AM) في E ، بين أن E هو المركز القائم للمثلث ABD

(3) المستقيمان (AD) و (BE) يتقاطعان في نقطة N . بين أن N نقطة من الدائرة (C)

(4) المستقيم الموازي ل (AM) و المار من B يقطع (AD) في F .

قارن $\frac{BM}{BD}$ و $\frac{FA}{FD}$ ثم استنتج أن A هو منتصف [DF]

(5) المستقيمان (AB) و (FM) يتقاطعان في I . احسب AI



مرحبا بكم على منصة مراجعة



COLLEGE.MOURAJAA.COM



NEWS.MOURAJAA.COM

