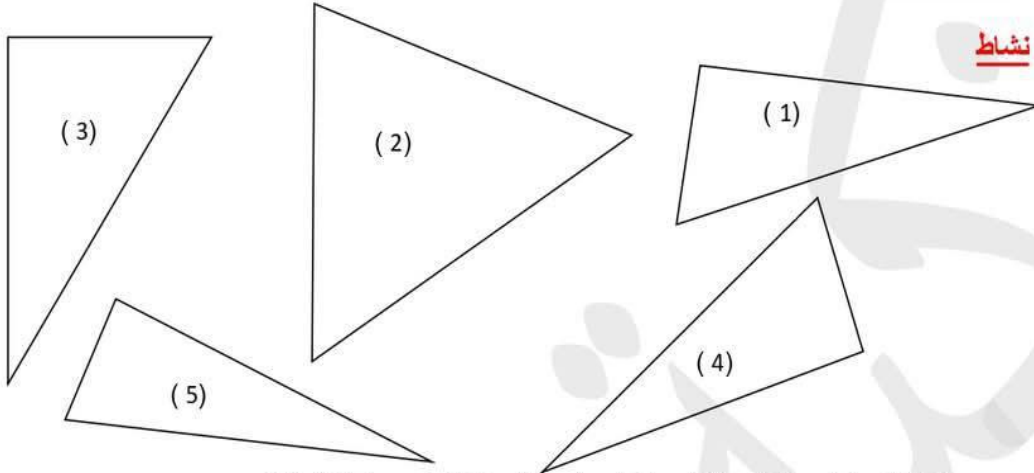




1. تقاييس المثلثات

نشاط



من بين المثلثات (2) و (3) و (4) و (5) ماهي التي تتطابق مع المثلث (1)
للإجابة على هذا السؤال يمكننا نقل المثلث (1) على ورق شفاف ثم نحاول مطابقته على بقية المثلثات
فنلاحظ مطابقة المثلثين (1) و (4)



المثلثين (1) و (4) قابلان للتطابق نقول أنهما متقايسين

عموما

مثلثان متقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق

ملاحظة

ليكن ABC و EFG مثلثان متقايسان إذن هما قابلان للتطابق
وبالتالي كل ضلع من المثلث ABC يتطابق مع ضلع من المثلث EFG
ومنه كل ضلع من المثلث ABC يقايس ضلع من المثلث EFG ونقول أن أضلاع المثلثين تتقايس مثنى مثنى
كذلك كل زاوية من المثلث ABC تتطابق مع زاوية من المثلث EFG
ومنه كل زاوية من المثلث ABC تقايس زاوية من المثلث EFG ونقول أن زوايا المثلثين تتقايس مثنى مثنى

عموما

إذا تقايس مثلثان فإن

- أضلاعهما متقايسة مثنى مثنى
- زواياهما متقايسة مثنى مثنى





مصطلحات

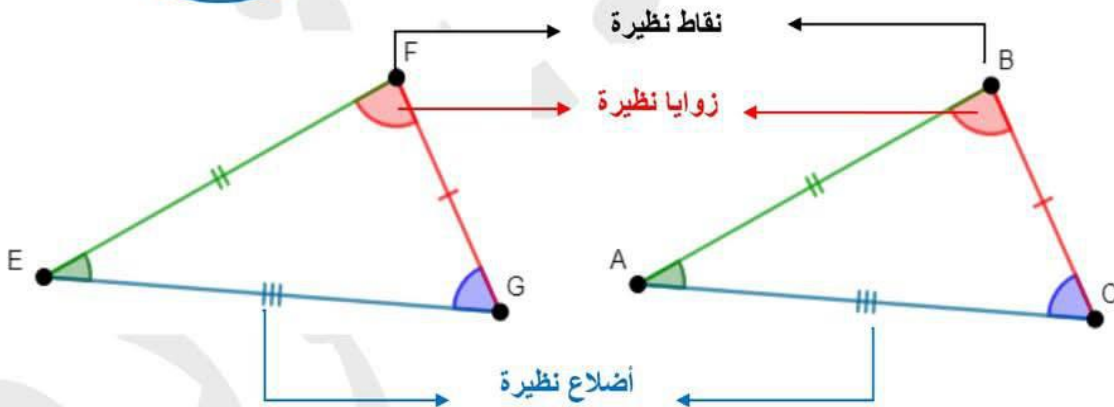
في المثلثين المتقايسين النقاط القابلة للتطابق تسمى نقاط نظيرة

و الأضلاع القابلة للتطابق تسمى أضلاع نظيرة

و الزوايا القابلة للتطابق تسمى زوايا نظيرة

ليكن ABC و EFG مثلثان متقايسان حيث النقاط A و B و C تطابق على التوالي على النقاط E و F و G فإن :

E نظيرة A	النقاط النظيرة	$[AB]$ نظير $[EF]$	الأضلاع النظيرة
F نظيرة B و		$[AC]$ نظير $[EG]$ و	
G نظيرة C و		$[BC]$ نظير $[FG]$ و	
$\widehat{EFG}$ نظيرة $\widehat{ABC}$	الزوايا النظيرة		
$\widehat{FEG}$ نظيرة $\widehat{BAC}$ و			
$\widehat{EGF}$ نظيرة $\widehat{ACB}$ و			



تمرين

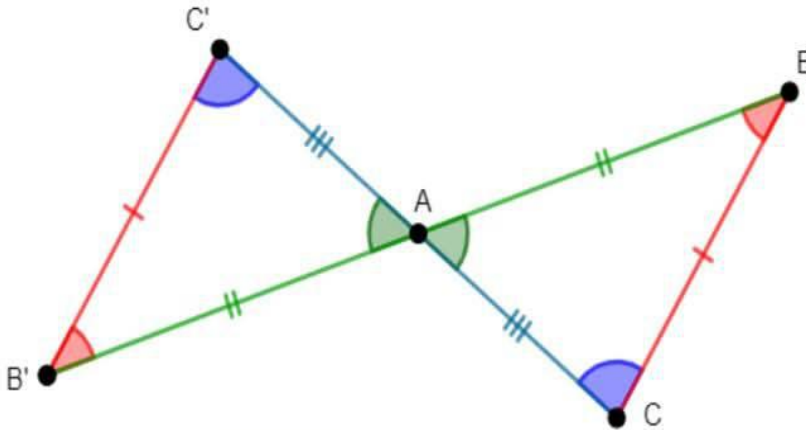
ليكن ABC ابن B' و C' مناظرتي B و C على التوالي بالنسبة إلى النقطة A

- بين أن $AB' = AB$ و $AC' = AC$ و $B'C' = BC$
- بين أن $\widehat{B'AC'} = \widehat{BAC}$ و $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$ و $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$
- بين أن المثلثين ABC و $AB'C'$ متقايسين





الإصلاح



(1) بما أن B' منظرية B بالنسبة إلى A فإن A منتصف $[BB']$ و بالتالي $AB' = AB$

بما أن C' منظرية C بالنسبة إلى A فإن A منتصف $[CC']$ و بالتالي $AC' = AC$

بما أن B' منظرية B و C' منظرية C ونعلم أن التناظر المركزي يحافظ على البعد فإن $B'C' = BC$

(2) بما أن B' منظرية B و A منظرية A و C' منظرية C فإن الزاوية $B'AC'$ منظرية للزاوية BAC



و نعلم أن التناظر المركزي يحافظ على أقيسة الزوايا فإن $\widehat{B'AC'} = \widehat{BAC}$ بما أن A منظرية A و B' منظرية B و C' منظرية C فإن الزاوية $\widehat{AB'C'}$ منظرية للزاوية $\widehat{ABC}$

و نعلم أن التناظر المركزي يحافظ على أقيسة الزوايا فإن $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$

بما أن A منظرية A و C' منظرية C و B' منظرية B فإن الزاوية $\widehat{AC'B'}$ منظرية للزاوية $\widehat{ACB}$

و نعلم أن التناظر المركزي يحافظ على أقيسة الزوايا فإن $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$



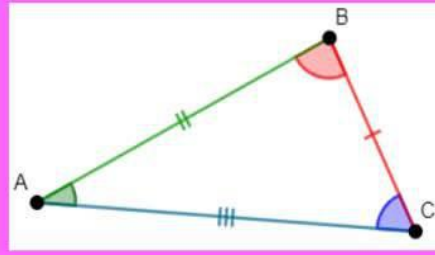
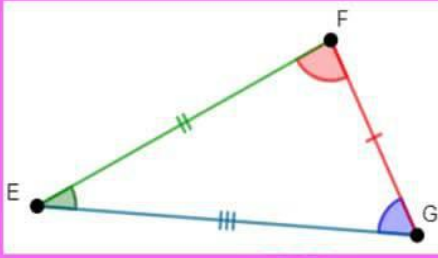


(3) بما أن النقاط A' و B' و C' مناظرات لـ A و B و C على التوالي بالنسبة إلى A فإن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متناظرين بالنسبة إلى النقطة A وبالتالي هما قابلان للتطابق عند الدوران بنصف دائرة حول النقطة A وبذلك هما متقايسان

في المثلثين ABC و $A'B'C'$ الأضلاع متقايسة مثنى مثنى والزوايا متقايسة مثنى مثنى و هما متقايسان

تعريف

مثلثان متقايسان هما مثلثان تتقايس فيهما الأضلاع مثنى مثنى و الزوايا مثنى مثنى



II. حالات التقايس

1) الحالة الأولى

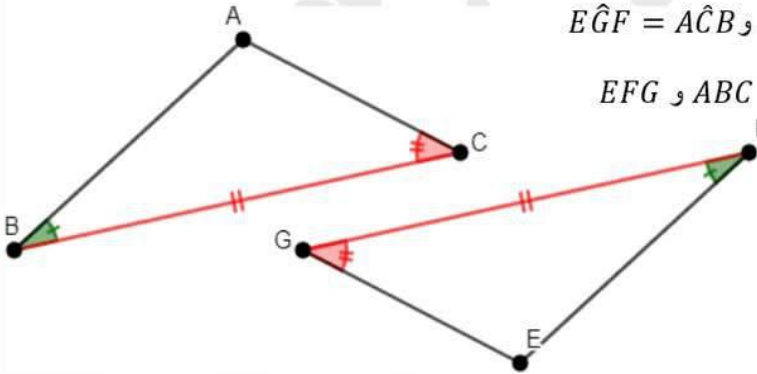
نشاط

في الرسم المقابل مثلث ABC

(1) ابن المثلث EFG على وق شفاف حيث :

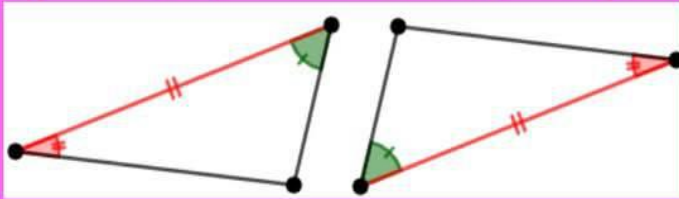
$$E\hat{G}F = A\hat{C}B \text{ و } E\hat{F}G = A\hat{B}C \text{ و } FG = BC$$

(2) تحقق من تقايس المثلثين EFG و ABC



عموما (الحالة الأولى للتقايس)

يتقايس مثلثين إذا قايس فيهما ضلع و الزاويتان المجاورتان له في أحدهما ضلعا و الزاويتين المجاورتين له في الثاني مثنى مثنى

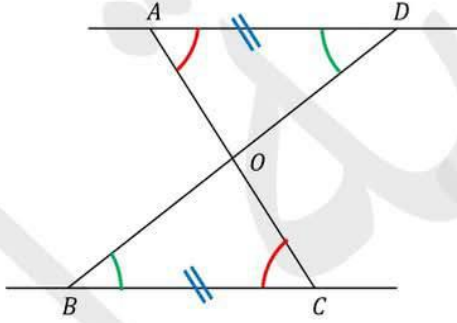
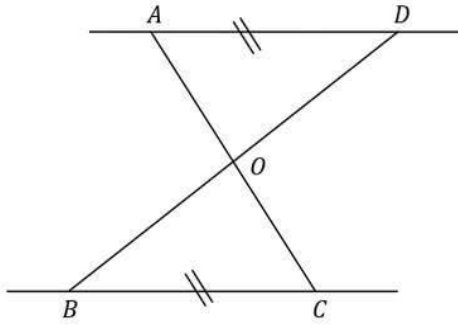




تمرين تطبيقي

تأمل الرسم التالي حيث $AD \parallel BC$ و $AD = BC$
و (AC) و (BD) يتقاطعان في النقطة O
(1) قارن المثلثين OBC و OAD
(2) استنتج أن O منتصف $[AC]$ و $[BD]$

الإصلاح



(1) بما أن الزاويتان $O\hat{A}D$ و $O\hat{C}B$ متبادلتان داخليا حاصلتان عن تقاطع (AC) مع المتوازيين (AD) و (BC) فهما متقايستان أي $O\hat{A}D = O\hat{C}B$

كذلك الزاويتان $O\hat{D}A$ و $O\hat{B}C$ متبادلتان داخليا حاصلتان عن تقاطع (BD)

مع المتوازيين (AD) و (BC) فهما متقايستان أي $O\hat{D}A = O\hat{B}C$

في المثلثين OBC و OAD لدينا



إذن المثلثان OBC و OAD متقايسان حسب الحالة الأولى للتقايس

(2) بما أن المثلثين ABC و ACD متقايسين فإن بقية العناصر النظرية تكون متقايسة
النقاط النظرية :

A	O	D
C	O	B

و بالتالي $OA = OC$ (أضلاع نظيرة)

و $OD = OB$ (أضلاع نظيرة)

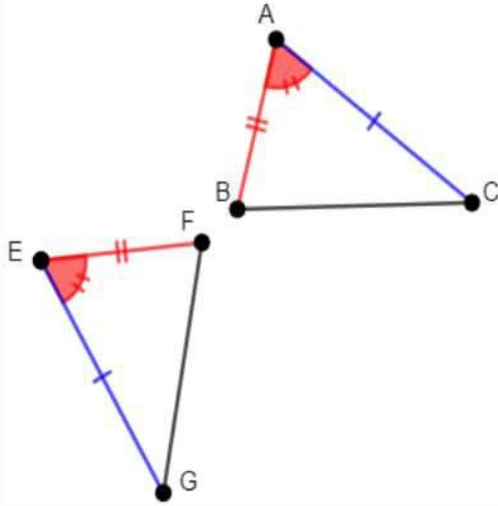
بما أن النقاط O و A و C على نفس الإستقامة لأن O نقطة من (AC) و $OA = OC$

فإن O منتصف $[AC]$

بما أن النقاط O و B و D على نفس الإستقامة لأن O نقطة من (BD) و $OB = OD$

فإن O منتصف $[BD]$





(2) الحالة الثانية

نشاط

في الرسم المقابل مثلث ABC مثلث

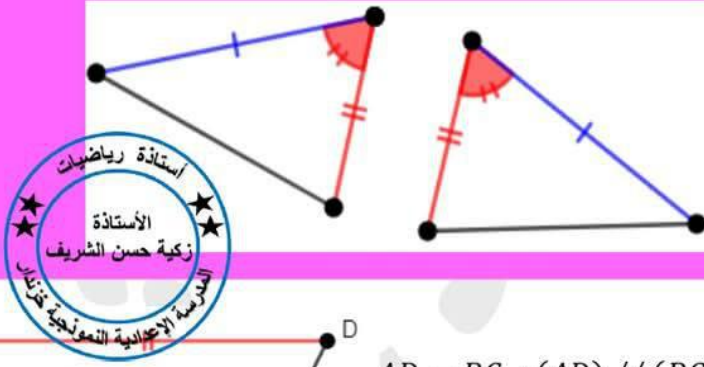
(3) ابن المثلث EFG على وق شفاف حيث :

$$F\hat{E}G = B\hat{A}C \text{ و } EG = AC \text{ و } EF = AB$$

(4) تحقق من تقايس المثلثين ABC و EFG

عموما (الحالة الثانية للتقايس)

يتقايس مثلثين إذا قايس فيهما ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما في أحدهما ضلعين و الزاوية المحصورة بينهما في الثاني مثلثي مثلثي



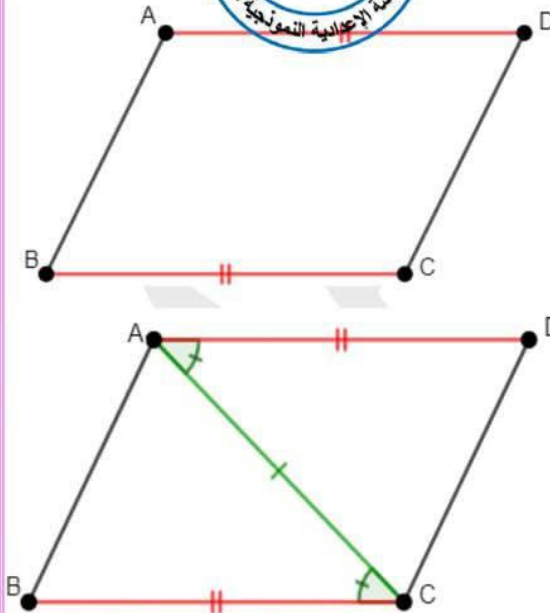
تمرين تطبيقي

تأمل الرسم التالي حيث $AD = BC$ و $(AD) \parallel (BC)$

(3) قارن المثلثين ABC و ACD

(4) استنتج أن $(AB) \parallel (CD)$

الإصلاح



(1) الزاويتان $C\hat{A}D$ و $A\hat{C}B$ متبادلتان داخليا حاصلتان

عن تقاطع (AC) مع المتوازيين (AD) و (BC)

فهما متقايستان أي $A\hat{C}B = C\hat{A}D$

في المثلثين ABC و ACD لدينا

- [AC] ضلع مشترك
- $AD = BC$
- $A\hat{C}B = C\hat{A}D$

إذن المثلثان ABC و ACD متقايسان حسب الحالة الثانية للتقايس

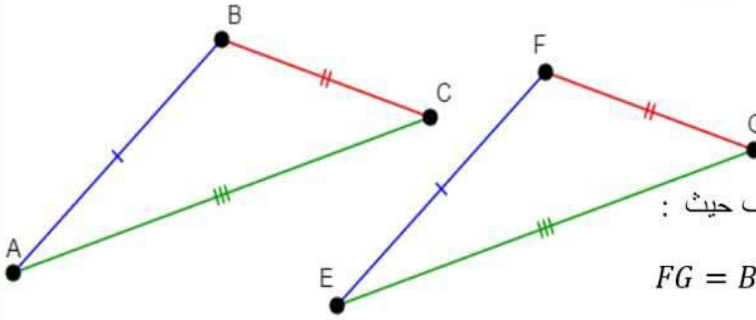




(2) بما أن المثلث ABC و ACD متقايسين فإن بقية العناصر النظرية تكون متقايسة
النقاط النظرية :

A	B	C
C	D	A

و بالتالي $\hat{CAB} = \hat{ACD}$ (زوايا نظيرة)
لدينا الزاويتان $\hat{CAB}$ و $\hat{ACD}$ متبادلتان داخليا ناتجتان عن تقاطع (AC) مع (AB) و (CD) وهما
متقايستان إذن $(AB) \parallel (CD)$



(3) الحالة الثالثة

نشاط

في الرسم المقابل مثلث ABC

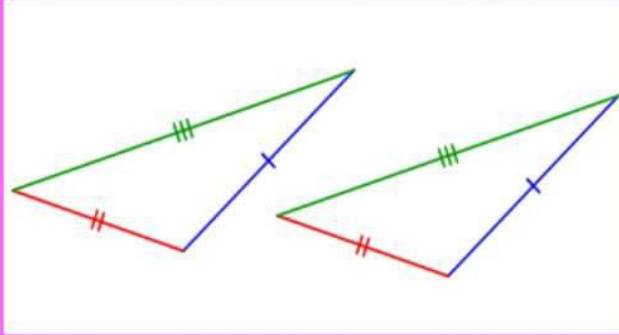
(1) ابن المثلث EFG على وق شفاف حيث :

$$FG = BC \text{ و } EG = AC \text{ و } EF = AB$$

(2) تحقق من تقايس المثلثين EFG و ABC

عموما (الحالة الثالثة للتقايس)

يتقايس مثلثين إذا قايست فيهما الأضلاع الثلاثة في أحدهما ضلعين الأضلاع الثلاثة في الثاني مثني
مثني



تمرين تطبيقي

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع قارن المثلثين ABC و ACD

الإصلاح

بما $ABCD$ متوازي أضلاع فإن كل ضلعين متقابلين متقايسين





في المثلثين ABC و ACD لدينا

- [AC] ضلع مشترك
- $AB = CD$ (ضلعين متقابلين من متوازي الأضلاع)
- $AD = BC$ (ضلعين متقابلين من متوازي الأضلاع)

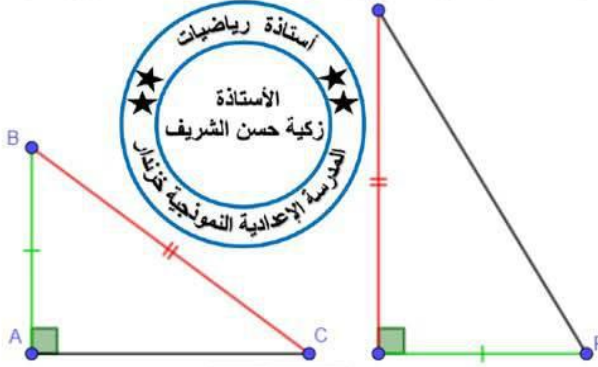
إذن المثلثين ABC و ACD متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس

ملاحظة

- في كل هذه الحالات يوجد ثلاثة عناصر تتقايس في المثلثين يجب إظهارها لنستنتج أن المثلثين متقايسان
- موقع الزوايا والأضلاع التي تتقايس ومدى احترامها لشروط حالة التقايس الأولى أو الثانية خاصة ففي الحالة الأولى ضلع واحد والزائتين المجاورتين لهذا الضلع وفي الحالة الثانية زاوية والضلعان اللذان يشكلان هذه الزاوية

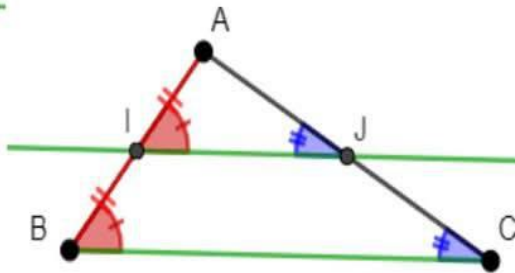
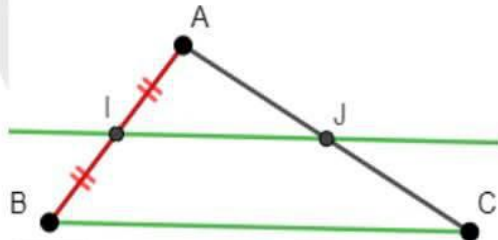
مثال مضاد لتوضيح أهمية مكان العناصر التي تتقايس

ABC و EFG مثلثان قائمان في A و E على التوالي حيث $EF = AB$ و $EG = BC$ و $F\hat{E}G = B\hat{A}C$ (زاوية قائمة) ولكن المثلثين غير متقايسين لأن الزاوية ليست محصورة بين الضلعين



تمرين

- ليكن ABC مثلثا و I منتصف $[AB]$
المستقيم المار من I و الموازي لـ (BC) يقطع $[AC]$ في النقطة J
- (1) بين أن $A\hat{J}I = A\hat{C}B$ و $A\hat{I}J = A\hat{B}C$
 - (2) هل أن المثلثين AIJ و ABC متقايسان



الإصلاح





(1) لدينا الزاويتين $\hat{A}BC$ و $\hat{A}IJ$ متماثلتان حاصلتان عن تقاطع (AB) مع المتوازيين (BC) و (IJ) فهما متقايستان أي $\hat{A}IJ = \hat{A}BC$

لدينا الزاويتين $\hat{A}CB$ و $\hat{A}JI$ متماثلتان حاصلتان عن تقاطع (AC) مع المتوازيين (BC) و (IJ) فهما متقايستان أي $\hat{A}JI = \hat{A}CB$

(2) المثلثين ABC و AIJ ليسا متقايسان لأن أضلاعهما لا تتقايس مثنى مثنى رغم تقايس زواياهما مثنى مثنى

لتقايس مثلثان يكفي أن تتقايس فيهما الأضلاع مثنى مثنى
و لا يكفي أن تتقايس فيهما الزوايا مثنى مثنى

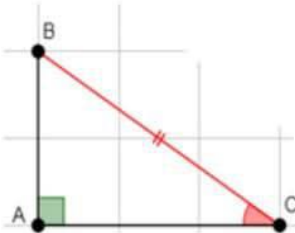


III. الحالات الخاصة لتقايس المثلثات القائمة

(1) الحالة الأولى

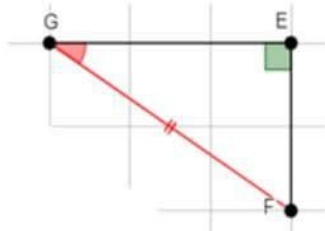
نشاط

في الرسم المقابل ABC مثلثا قائما في A



(1) ابن المثلث EFG القائم في E على وق شفاف حيث :

$$\hat{E}FG = \hat{A}BC \text{ و } FG = BC$$



(2) أ - بين أن $\hat{E}GF = \hat{A}CB$

ب - استنتج أن المثلثين EFG و ABC متقايسان

الإصلاح

(2) أ - بما أن ABC مثلث قائم في A فإن $\hat{A}CB = 90^\circ - \hat{A}BC$

و بما أن EFG مثلث قائم في E فإن $\hat{E}GF = 90^\circ - \hat{E}FG$

و لنا $\hat{E}FG = \hat{A}BC$ (معطى)

إذن $\hat{E}GF = \hat{A}CB$ و بالتالي $90^\circ - \hat{E}FG = 90^\circ - \hat{A}BC$

ب - في المثلثين EFG و ABC لدينا

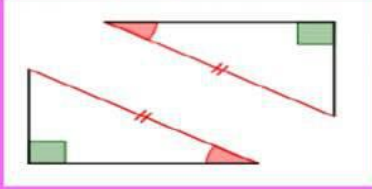
- $FG = BC$ (معطى)
 - و $\hat{E}FG = \hat{A}BC$ (معطى)
 - و $\hat{E}GF = \hat{A}CB$ (مما سبق)
- إذن هما متقايسان حسب الحالة الأولى للتقايس





عموماً (الحالة الأولى لتقايس المثلثات القائمة)

يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر و زاوية حادة في أحدهما الوتر و زاوية حادة في الثاني



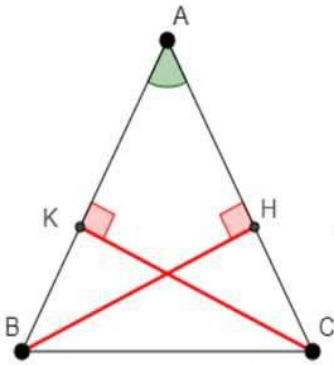
تمرين تطبيقي

ليكن ABC مثلثا متقايس الضلعين في A و H المسقط العمودي $\perp B$ على (AC) و K المسقط العمودي $\perp C$ على (AB)

(1) أثبت تقايس المثلثين ABH و ACK

(2) استنتج أن $BH = CK$

الإصلاح



(1) بما أن H المسقط العمودي $\perp B$ على (AC) فإن المثلث ABH قائم في H
وبما أن K المسقط العمودي $\perp C$ على (AB) فإن المثلث ACK قائم في K
و $AB = AC$ (ABC مثلثا متقايس الضلعين في A)
و $\hat{B}AH = \hat{C}AK = \hat{B}AC$ (زاوية مشتركة)
إذن المثلثين ABH و ACK متقايسان حسب الحالة الأولى لتقايس المثلثات القائمة
(2) بما أن المثلثين ABH و ACK متقايسين فإن بقية العناصر النظيرة تكون متقايسة
النقاط النظيرة :

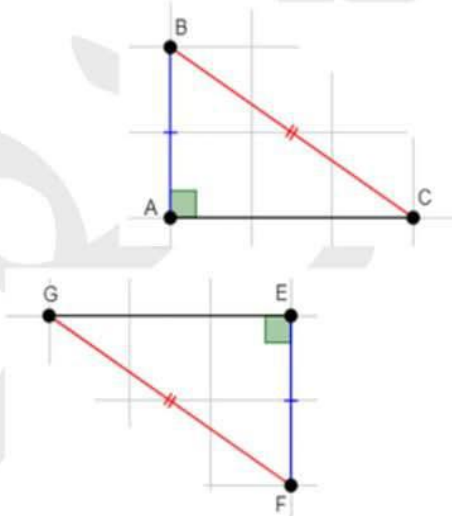
A	B	H
A	C	K

و بالتالي $BH = CK$ (أضلاع نظيرة)

(2) الحالة الثانية

نشاط

في الرسم المقابل ABC مثلثا قائما في A



(1) ابن المثلث EFG القائم في E على وق شفاف حيث :

$$EF = AB \text{ و } FG = BC$$

(2) أ - تحقق أن $EG = AC$

ب - استنتج أن المثلثين ABC و EFG متقايسان





الإصلاح

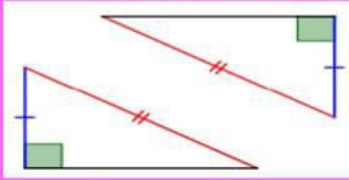
(2) أ - نتحقق باستعمال البركار أو المسطرة أن $EG = AC$

ب - في المثلثين ABC و EFG لدينا

$$\left\{ \begin{array}{l} FG = BC \text{ (معطى)} \\ EF = AB \text{ (معطى)} \\ EG = AC \text{ (مما سبق)} \end{array} \right. \text{ إذن هما متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس}$$

عموما (الحالة الثانية لتقايس المثلثات القائمة)

يتقايس مثلثان قائمان إذا قايس الوتر وضلع قائم في أحدهما الوتر وضلع قائم في الثاني



تمرين تطبيقي

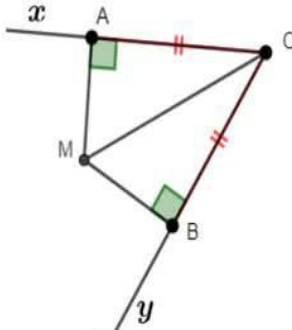
في الرسم التالي $x\hat{O}y$ زاوية و A و B نقطتين من $[ox]$ و $[oy]$ على التوالي حيث $OA = OB$

$(MA) \perp [ox]$ و $(MB) \perp [oy]$

(1) قارن المثلثين OAM و OBM

(2) استنتج أن $[OM]$ منصف الزاوية $x\hat{O}y$

الإصلاح



(1) المثلثان OAM و OBM قائمان في A و B على التوالي
وتر مشترك $[OM]$
 $OA = OB$ (معطى)

إذن حسب الحالة الثانية لتقايس المثلثات القائمة فإن المثلثان OAM و OBM متقايسان

(2) بما أن المثلث OAM و OBM متقايسين فإن بقية العناصر النظرية تكون متقايسة

النقاط النظرية :

O	A	M
O	B	M

و بالتالي $B\hat{O}M = A\hat{O}M$ (زوايا نظيرة)

الزاويتان $A\hat{O}M$ و $B\hat{O}M$ متجاورتان و متجاورتان في الضلع $[OM]$ يعني $[OM]$ منصف الزاوية

$A\hat{O}B$ و لنا $x\hat{O}y = A\hat{O}B$ إذن $[OM]$ منصف الزاوية $x\hat{O}y$





المثلثات الخاصة

(1) المثلث المتقايس الضلعين

هو مثلث له ضلعين متقايسين

نقطة تقاطع الضلعين المتقايسين تسمى القمة الرئيسية للمثلث

والضلع المقابل للقمة الرئيسية يسمى قاعدة المثلث

ABC مثلثا متقايس الضلعين قمته الرئيسية A يعني $AB = AC$ و $[BC]$ قاعدة المثلث

نشاط 1



ليكن ABC مثلثا متقايس الضلعين قمته الرئيسية A و I منتصف $[BC]$

- أ - بين أن (AI) هو المتوسط العمودي لقطعة المستقيم $[BC]$
- ب - ماذا تمثل $[AI]$ بالنسبة للمثلث ABC إذن هما متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس

(2) قارن المثلثين ACI و ABI

(3) استنتج أن $[AI]$ منصف الزاوية BAC و أن $\hat{ABC} = \hat{ACB}$

الإصلاح

(1) أ - بما أن ABC مثلث متقايس الضلعين قمته الرئيسية A فإن $AB = AC$ و بالتالي A نقطة من المتوسط العمودي ل $[BC]$ و I منتصف $[BC]$ إذن (AI) هو المتوسط العمودي لقطعة المستقيم $[BC]$

ب - بما أن I منتصف $[BC]$ فإن $[AI]$ تمثل المتوسط الصادر من A في المثلث ABC

و بما أن (AI) هو المتوسط العمودي لقطعة المستقيم $[BC]$

فإن $[AI]$ تمثل الارتفاع الصادر من A في المثلث ABC

(2) في المثلثين ACI و ABI لدينا

- $[AI]$ ضلع مشترك
- و $AB = AC$ (مثلث متقايس الضلعين قمته الرئيسية A)
- و $BI = CI$ (I منتصف $[BC]$)

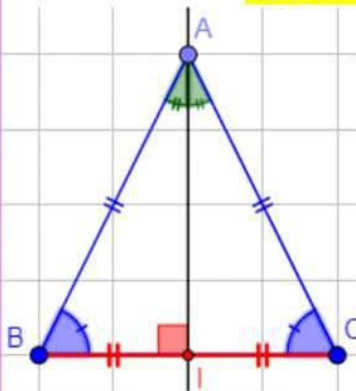
إذن المثلثين ACI و ABI متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس

(3) بما أن المثلثين ACI و ABI متقايسين فإن بقية العناصر النظرية تكون متقايسة النقاط النظرية :

A	B	I
A	C	I

و بالتالي $\hat{IAB} = \hat{IAC}$ (زوايا نظيرة)

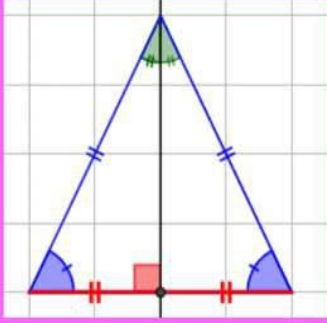
و $\hat{ABI} = \hat{ACI}$ (زوايا نظيرة)





الزاويتان $I\hat{A}B$ و $I\hat{A}C$ متقايستان و متجاورتان في الضلع $[AI]$ يعني $[AI]$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$
 $\hat{A}B\hat{I} = \hat{A}C\hat{I}$ و $\hat{A}B\hat{C} = \hat{A}B\hat{I}$ و $\hat{A}C\hat{B} = \hat{A}C\hat{I}$ إذن $\hat{A}B\hat{C} = \hat{A}C\hat{B}$
عموما

في المثلث المتقايس الضلعين :

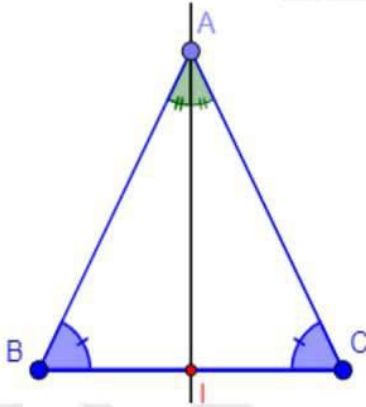


- المتوسط العمودي للقاعدة يمر من القمة الرئيسية
- المتوسط العمودي للقاعدة يحمل كلا من منصف الزاوية الرئيسية والارتفاع والمتوسط الموازي للقاعدة
- المتوسط العمودي للقاعدة يمثل محور تناظر للمثلث
- الزاويتان المجاورتان للقاعدة متقايستين



نشاط 2

ليكن ABC مثلثا حيث $\hat{A}B\hat{C} = \hat{A}C\hat{B}$ و $[AI]$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$ يقطع $[BC]$ في النقطة I



- 1) أ- بين أن $\hat{A}I\hat{C} = \hat{A}I\hat{B}$
- 2) قارن المثلثين ABI و ACI
- 3) استنتج أن المثلث ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A

الإصلاح

- 1) لدينا $[AI]$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$ إذن $\hat{I}A\hat{B} = \hat{I}A\hat{C}$
 و نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي 180° إذن
 $\hat{A}I\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A}B\hat{I} + \hat{I}A\hat{B})$
 $\hat{I}A\hat{B} = \hat{I}A\hat{C}$ و $\hat{A}B\hat{I} = \hat{A}B\hat{C}$) $= 180^\circ - (\hat{A}B\hat{C} + \hat{I}A\hat{C})$
 $(\hat{A}B\hat{C} = \hat{A}C\hat{B}) = 180^\circ - (\hat{A}C\hat{B} + \hat{I}A\hat{C})$
 $(\hat{A}C\hat{B} = \hat{A}C\hat{I}) = 180^\circ - (\hat{A}C\hat{I} + \hat{I}A\hat{C})$
 $\hat{A}I\hat{C} = \hat{A}I\hat{B}$ إذن $\hat{A}I\hat{C} = \hat{A}I\hat{B}$

- 2) في المثلثين ABI و ACI لدينا
 - $[AI]$ ضلع مشترك
 - $\hat{A}I\hat{C} = \hat{A}I\hat{B}$ (مما سبق)
 - $\hat{A}B\hat{I} = \hat{A}C\hat{I}$ ($\hat{A}B\hat{C} = \hat{A}C\hat{B}$)
 إذن المثلثين ABI و ACI متقايسان حسب الحالة الأولى للتقايس





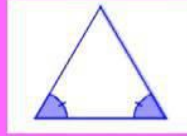
3) بما أن المثلث ABI و ACI متقايسين فإن بقية العناصر النظرية تكون متقايسة
النقاط النظرية :

A	B	I
A	C	I

و بالتالي $AB = AC$ (أضلاع نظيرة)
 $AB = AC$ يعني المثلث ABC متقايس الضلعين في A

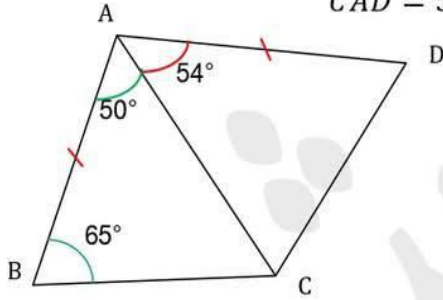
عموما

كل مثلث له زاويتان متقايستان هو مثلث متقايس الضلعين



تمرين تطبيقي

تأمل الرسم التالي حيث $\hat{ABC} = 65^\circ$ و $\hat{BAC} = 50^\circ$ و $\hat{CAD} = 54^\circ$



- 1) بين أن المثلث ABC متقايس الضلعين
- 2) أحسب $\hat{ADC}$

الإصلاح

1) نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي 180°

$$\begin{aligned} \hat{ACB} &= 180^\circ - (\hat{BAC} + \hat{ABC}) \\ &= 180^\circ - (50^\circ + 65^\circ) \\ &= 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ \end{aligned}$$

$$\hat{ACB} = 110^\circ \quad \text{إذن}$$

و بالتالي المثلث ABC له زاويتين متقايستان ($\hat{ABC} = \hat{ACB}$)
فهو متقايس الضلعين قمته الرئيسية A

$$\hat{ADC} = ? \quad (2)$$

بما أن المثلث ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{فإن } AB = AC \\ \text{ولنا } AB = AD \text{ (معطى) إذن } AC = AD \end{array} \right.$$

و منه المثلث ACD متقايس الضلعين قمته الرئيسية A

و بالتالي $\hat{ACD} = \hat{ADC}$ (الزاويتان المجاورتين للقاعدة متقايستان)





و نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي 180°

$$\begin{aligned} \hat{A}CD + \hat{A}DC &= 180^\circ - \hat{C}AD \\ &= 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ \end{aligned}$$



$$\hat{A}CD = \hat{A}DC = \frac{126^\circ}{2} = 63^\circ \text{ و بالتالي}$$

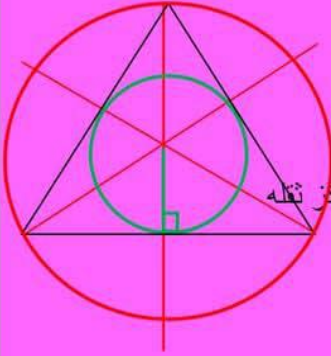
(2) المثلث المتقايس الأضلاع

هو مثلث أضلاعه متقايسة

ABC مثلثا متقايس الأضلاع قمته الرئيسية A يعني $AB = AC = BC$ و بالتالي له كل خاصيات المثلث المتقايس الضلعين في A أو في B أو في C و بالتالي

الخاصيات و الخاصيات المعاكسة

في المثلث المتقايس الأضلاع :

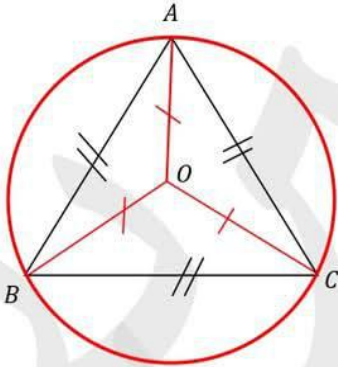


- المتوسط العمودي لكل ضلع يمر من الرأس المقابل
- المتوسط العمودي لكل ضلع يحمل كلا من منصف الزاوية والارتفاع والمتوسط
- مركز الدائرة المحيطة به هي مركز الدائرة المحاطة به هي مركزه القائم هي مركز ثقله
- المتوسطات العمودية لأضلاعه تمثل محاور تناظر للمثلث
- زواياه متقايسة و قيس كل واحدة 60°

تمرين تطبيقي

ليكن ABC مثلثا متقايس الأضلاع و O مركز للدائرة المحيطة به

قارن المثلثات AOB و AOC و BOC



الإصلاح

بما أن O مركز للدائرة المحيطة بالمثلث ABC

$$\text{فإن } OA = OB = OC$$

و بما أن ABC مثلثا متقايس الأضلاع فإن $AB = AC = BC$

في المثلثين AOB و AOC لدينا

- $[OA]$ ضلع مشترك
 - $OB = OC$
 - $AB = AC$
- إذن المثلثين AOB و AOC متقايسان حسب الحالة الثالثة للتقايس





بنفس الطريقة نثبت أن المثلثين AOC و BOC متقايسان
و بالتالي المثلثات AOC و BOC متقايسة

كل مثلث زواياه متقايسة هو مثلث متقايس الأضلاع

نشاط

ليكن ABC مثلثا متقايس الضلعين قمته الرئيسية A حيث $\hat{BAC} = 60^\circ$
بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

الإصلاح

بما أن ABC مثلثا متقايس الضلعين قمته الرئيسية A فإن $\hat{ABC} = \hat{ACB}$

و نعلم و نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي 180° إذن

$$(\hat{ABC} + \hat{ACB}) = 180^\circ - \hat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{ABC} = \hat{ACB} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \text{ و بالتالي}$$

المثلث ABC زواياه متقايسة ($\hat{BAC} = \hat{ABC} = \hat{ACB} = 60^\circ$) فهو متقايس الأضلاع

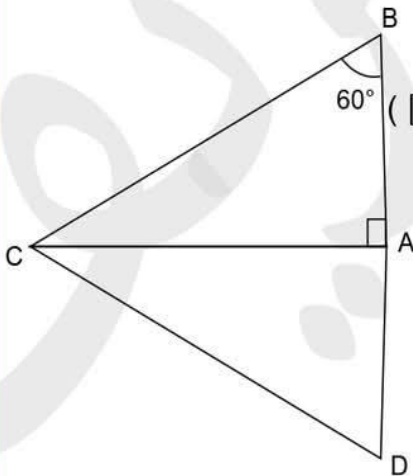
عموما

كل مثلث متقايس الضلعين و له زاوية قيسها 60° هو مثلث
متقايس الأضلاع

تمرين تطبيقي

- ارسم مثلثا ABC قائم الزاوية في A حيث $AB = 3cm$ و $\hat{ABC} = 60^\circ$
- لتكن D منازرة B بالنسبة إلى A بين أن BCD متقايس الأضلاع و استنتج CD

الإصلاح



(2) بما أن D منازرة B بالنسبة إلى A فإن A منتصف $[BD]$

و ($AC \perp (BD)$) (لأن ABC قائم الزاوية في A و D من $[AB]$)

فإن (AC) الموسط العمودي لـ $[BD]$ و بالتالي $CB = CD$

و منه المثلث BCD متقايس الضلعين في C

و بما أن له زاوية قيسها 60° ($\hat{CBD} = \hat{ABC} = 60^\circ$)

فهو مثلث متقايس الأضلاع





$$CD = ?$$

بما أن BCD متقايس الأضلاع فإن $BC = DB = CD$

ولنا D منازرة B بالنسبة إلى A إذن $DB = 2AB$

و $AB = 3cm$ (معطى) إذن $DB = 2AB = 2 \times 3 = 6cm$

إذن $DB = 6cm$ إذن $CD = 6cm$



الخاصية المميزة لمنصف الزاوية

نشاط 1

(1) أرسم زاوية $x\hat{O}y$ وابن $[oz]$ منصفها

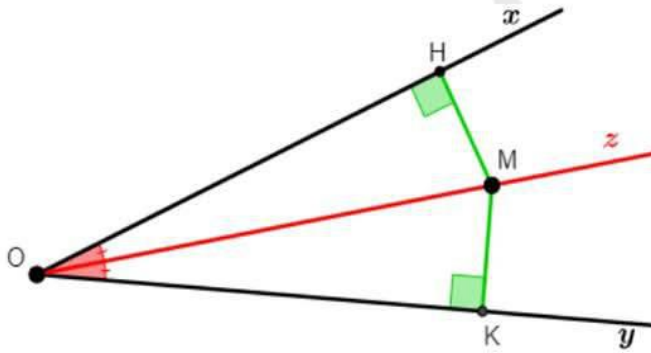
(2) اءن نقطة M من $[oz]$ ثم حدد H و K المساقط العمودية لـ M

على $[ox]$ و $[oy]$ على التوالي

(3) أ- قارن المثلثين OMK و OMH

ب- استنتج أن $MH = MK$

الإصلاح



(3) أ- بما أن H المسقط العمودي لـ M على (ox) فإن المثلث OMH قائم في H

و بما أن K المسقط العمودي لـ M على (oy) فإن المثلث OMK قائم في K

و $[OM]$ (وتر مشترك)

$M\hat{O}H = M\hat{O}K$ ($[oz]$ منصف $x\hat{O}y$ و H و K نقاط من $[ox]$ و $[oy]$ و $[oz]$ على التوالي)

إذن المثلثان ACK و ABH متقايسان حسب الحالة الأولى لتقايس المثلثات القائمة

ب- بما أن المثلث ACK و ABH متقايسين فإن بقية العناصر النظرية تكون متقايسة

النقاط النظرية :

O	M	H
O	M	K

و بالتالي $MH = MK$ (أضلاع نظيرة)

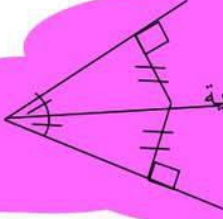
ملاحظة

بعد M عن $[ox]$ هو البعد MH وبعد M عن $[oy]$ هو البعد MK



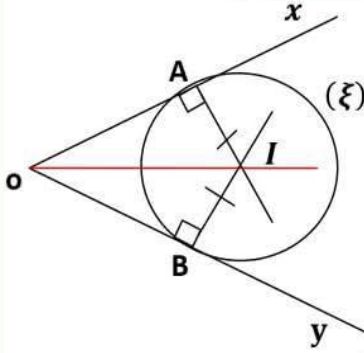


عموما



كل نقطة من منتصف الزاوية تكون متقايسة البعد عن ضلعي الزاوية

نشاط 2



في الرسم التالي (ξ) دائرة مركزها I و [ox] و [oy] مماسان للدائرة (ξ)

في النقطتين A و B على التوالي

(1) قارن المثلثين OAI و OBI

(2) استنتج أن [OI] هو منتصف الزاوية xOy

الإصلاح

- (1) بما أن [ox] و [oy] مماسان للدائرة (ξ) في النقطتين A و B على التوالي فإن المثلثين OAI و OBI قائمان في A و B على التوالي [OI] وتر مشترك IA = IB (النقطتين A و B من الدائرة (ξ) التي مركزها I)

إذن حسب الحالة الثانية لتقايس المثلثات القائمة فإن المثلثين OAI و OBI متقايسان

(2) بما أن المثلثين OAI و OBI متقايسين فإن بقية العناصر المتقايسة متقايسة النقاط النظرية :



O	A	I
O	B	I

و بالتالي $B\hat{O}I = A\hat{O}I$ (زوايا نظيرة)

الزاويتان $B\hat{O}I$ و $A\hat{O}I$ متقايسان و متجاورتان في الضلع [OI] يعني [OI] منتصف الزاوية $A\hat{O}B$

و لنا $xOy = A\hat{O}B$ إذن [OI] منتصف الزاوية xOy

ملاحظة

النقطتين A و B من الدائرة (ξ) التي مركزها I إذن IA = IB

بما أن [ox] و [oy] مماسان للدائرة (ξ) في A و B على التوالي فإن بعد I عن [ox] وعن [oy]

يساوي شعاع الدائرة وبالتالي بعد I عن [ox] يساوي بعد I عن [oy]

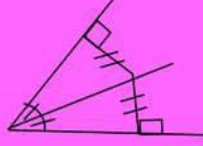
و منه I متقايسة البعد عن [ox] و [oy]





عموما

كل نقطة متقايسة البعد عن ضلعي الزاوية هي نقطة من منتصف الزاوية



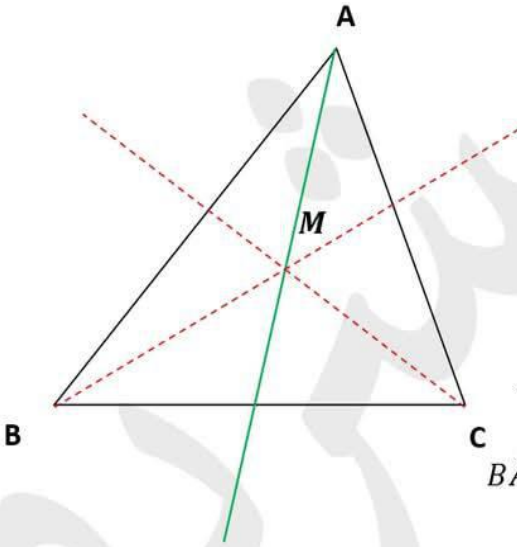
من النشاط 1 و 2 نستنتج

منتصف الزاوية هو مجموعة النقاط من الزاوية المتساوية البعد عن ضلعيها

تمرين تطبيقي

- (1) أ - ابن المثلث ABC حيث $BC = 4cm$ و $\hat{A}BC = 40^\circ$ و $\hat{A}CB = 80^\circ$
- (2) أحسب $\hat{B}AC$
- (3) أ - ابن منصفى الزاويتين $\hat{A}BC$ و $\hat{A}CB$ و عين M نقطة تقاطعهما
ب - أحسب $\hat{M}AC$ و $\hat{M}BC$

الإصلاح



(2) $\hat{B}AC = ?$

نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي 180°

إذن $\hat{A}C = 180^\circ - (\hat{A}BC + \hat{A}CB)$

$$= 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ)$$

$$\hat{B}AC = 60^\circ \quad \text{إذن} \quad = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

(3) $\hat{M}AC = ?$

بما أن M نقطة تقاطع منصفى الزاويتين $\hat{A}BC$ و $\hat{A}CB$

فإن منتصف الزاوية $\hat{B}AC$ يمر أيضا من M

و بالتالي نصف المستقيم (AM) هو منتصف الزاوية $\hat{B}AC$

$$\text{و منه } \hat{M}AC = \hat{M}AB = \frac{\hat{B}AC}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\hat{M}AC = 30^\circ \quad \text{إذن}$$

$\hat{M}BC = ?$

بما أن M نصف المستقيم (CM) منتصف الزاوية $\hat{A}CB$

فإن $\hat{M}CA = \hat{M}CB$

$$= \frac{\hat{A}CB}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

$$\hat{M}CA = 40^\circ \quad \text{إذن}$$





و بما أن مجموع أقيسة زوايا المثلث يساوي 180°

$$\widehat{AMC} = 180^\circ - (\widehat{MAC} + \widehat{MCA}) \text{ إذن}$$

$$= 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ)$$

$$\widehat{AMC} = 110^\circ \text{ إذن } = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

نشاط

(1) ارسم مثلثا ABC

(2) ابن (Ax) منصف الزاوية $\widehat{BAC}$

(3) ابن (By) منصف الزاوية $\widehat{ABC}$

(4) عين النقطة P تقاطع (Ax) و (By)

(5) بين أن P لها نفس البعد عن الأضلاع $[AB]$ و $[AC]$ و $[BC]$

الإصلاح

(5) بما أن P نقطة من (Ax) منصف الزاوية $\widehat{BAC}$

فإن P متساوية البعد عن ضلعي الزاوية (AB) و (AC)

كذلك P نقطة من (By) منصف الزاوية $\widehat{ABC}$

فإن P متساوية البعد عن ضلعي الزاوية (BA) و (BC)

وبالتالي P لها نفس البعد عن الأضلاع $[AB]$ و $[AC]$ و $[BC]$

تعريف

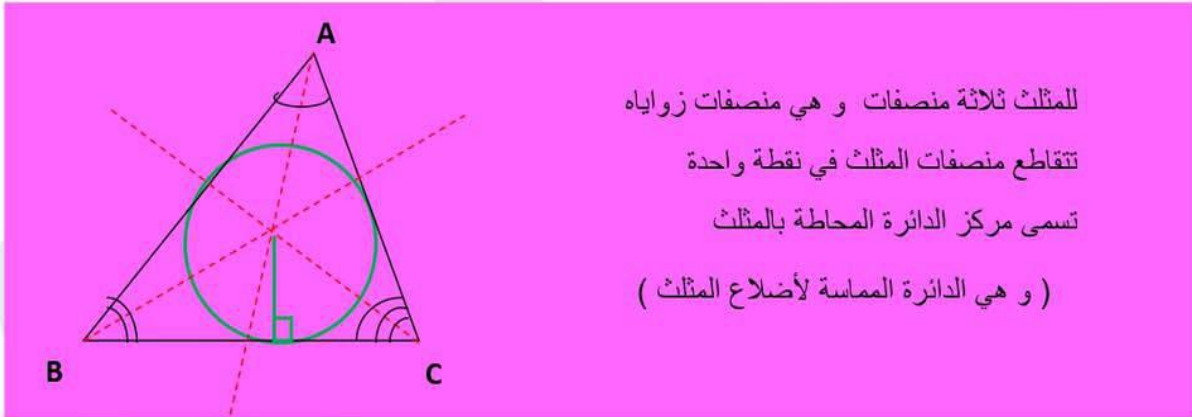
انصاف المستقيمات (Ax) و (By) و (Cz) تسمى منصفات المثلث ABC

بما أن P متساوية البعد عن الأضلاع (BA) و (BC) و (CA)

فإن P متساوية البعد عن أضلاع المثلث $[AB]$ و $[AC]$ و $[BC]$

وبالتالي P مركز للدائرة المماسية لأضلاع المثلث ABC وتسمى الدائرة المحاطة بالمثلث ABC

عموما



للمثلث ثلاثة منصفات و هي منصفات زواياه

تتقاطع منصفات المثلث في نقطة واحدة

تسمى مركز الدائرة المحاطة بالمثلث

(و هي الدائرة المماسية لأضلاع المثلث)

❖ مركز الدائرة المحاطة بالمثلث هي نقطة متقايسة البعد عن أضلاع المثلث

❖ لنحصل على مركز الدائرة المحاطة بالمثلث يكفي تقاطع منصفين منه

❖ شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث هو بعد المركز عن أحد الأضلاع

❖ كل نصف مستقيم ينطلق من رأس المثلث و مركز الدائرة المحاطة به هو منصف زاوية



مرحبا بكم على منصة مراجعة



COLLEGE.MOURAJAA.COM



NEWS.MOURAJAA.COM

